Gradiente di una funzione

$$\nabla f(x_{0,}y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_{0,}y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_{0,}y_0)\right)=(\nabla_{11,}\nabla_{12})$$

Il gradiente di una funzione di due o più variabili è dato dalle derivate parziali rispetto ad ognuna delle sue variabili in un determinato punto.
Par calcolare la derivata parziale rispetto ad una variabile, considerare solo quella e porre come costanti le altre variabili, quindi procedere con il classico metodo delle derivate.

Matrice Hessiana (H o Hess)

$$H(f(x_{0,}y_0))=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_{0,}y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_{0,}y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_{0,}y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_{0,}y_0)\end{pmatrix}$$

La matrice hessiana della funzione *f* calcolata in un punto di coordinate (x_0, y_0)

Composizione:
1^ riga, 1^ colonna (H_{11}): derivata parziale in x della componente ∇_{11} del gradiente
diagonale (H_{12} e H_{21}): derivata parziale in y della componente ∇_{11} del gradiente[1]
2^ riga, 2^ colonna (H_{22}): derivata parziale in y della componente ∇_{12} del gradiente

Proprietà:

- se det H < 0, il punto in cui è calcolata l'hessiana è di sella
- se det H > 0
  - Se $H_{11} > 0$ è un punto di minimo
  - Se $H_{11} < 0$ è un punto di massimo
- se det H = 0 la matrice non fornisce nessuna informazione

Formula di Taylor per due variabili

Calcolare prima la funzione nel punto, il gradiente e la matrice hessiana della funzione

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=f(x_{0,}y_0)+\\
&+\nabla_{11}(x-x_0)+\nabla_{12}(y-y_0)+\\
&+\frac{1}{2}H_{11}(x-x_0)^2+\frac{1}{2}H_{22}(y-y_0)^2+\\
&+H_{12}(x-x_0)(y-y_0)+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)
\end{aligned}$$

Se il punto considerato è (0, 0), allora bisogna mettere nella formula di sopra:

- x al posto di $(x-x_0)$
- y al posto di $(y-y_0)$

e la formula prende il nome di Polinomio di MacLaurin

1 Le due derivate parziali miste sulla diagonale sono uguali per il teorema di Schwarz

Esempi di sviluppo della formula di Taylor per due variabili[2]

Esempio 1

$\boldsymbol{f(x,y)=(x+y)^2+y^4}$ nel punto $(1,1)$

$f(1,1)=(1+1)^2+1^4=5$

Calcolo le componenti del gradiente e della matrice hessiana:

$\nabla_{11}=2(x+y)\rightarrow 4$ $\nabla_{12}=2(x+y)+4y^3\rightarrow 8$

$H_{11}=2x+\mathbf{2y}=2$ $H_{12}=\mathbf{2x}+2y=2$

$H_{22}=\mathbf{2x}+2y+4\cdot 3y^2=2+12y^2\rightarrow 14$

Quindi si può scrivere il polinomio di Taylor per $f(x,y)\rightarrow(1,1)$

$$f(1,1)=5+4(x-1)+8(y-1)+(x-1)^2+7(y-1)^2+2(x-1)(y-1)+o((x-1)^2(y-1)^2)$$

Esempio 2

$\boldsymbol{f(x,y)=x^2+2y^2-xy}$ nel punto $(-1,1)$

$f(-1,1)=-1^2+2\cdot 1^2-(-1)\cdot 1=1+2+1=4$

Calcolo le componenti del gradiente e della matrice hessiana:

$\nabla_{11}=x^2+\mathbf{2y^2}-x\mathbf{y}=2x-y\rightarrow -3$ $\nabla_{12}=\mathbf{x^2}+2y^2-\mathbf{x}y=4y-x\rightarrow 5$

$H_{11}=2x-\mathbf{y}=2$ $H_{12}=\mathbf{2x}-y=-1$

$H_{22}=4y-\mathbf{x}=4$

Quindi si può scrivere il polinomio di Taylor per $f(x,y)\rightarrow(-1,1)$

$$f(1,1)=4-3(x+1)+5(y-1)+(x+1)^2+2(y-1)^2-(x+1)(y-1)+o((x+1)^2(y-1)^2)$$

2 Con la freccia si indica che si sostituiscono le coordinate del punto considerato nel polinomio
Con il blu grassetto si indicano le variabili considerate costanti nel calcolo delle derivate parziali