Decomposizione in fratti semplici

Nella risoluzione di integrali, spesso capitano situazioni in cui vi siano funzioni razionali (ovvero di polinomi fratto polinomi). Nei casi in cui il denominatore sia di grado maggiore del numeratore e sia di primo o di secondo grado, si può utilizzare la tecnica di decomposizione in fratti semplici.

Esempio:

$$\int \frac{3x+7}{x^2+1}\,dx$$

1. Effettuare la divisione del numeratore per il denominatore, fino a far diventare il grado del numeratore minore di quello del denominatore

2. Scomporre il denominatore:

   $$x^2+1 = (x+1)(x-1)$$

3. Scrivere la decomposizione in fratti semplici:

   $$\frac{3x+7}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

4. I numeratori devono coincidere, per cui si ha:

   $$3x+7 = A(x-1) + B(x+1)$$

   $$3x+7 = Ax-A+Bx+B \rightarrow 3x+7 = x(A+B)+(B-A)$$

5. Per il principio di identità dei polinomi si ha che il valore delle variabili a sinistra dell'uguale deve essere uguale al valore che c'è a destra, per cui si ottiene il sistema:

   $$\begin{cases} A+B = 3 \\ B-A = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 5 \end{cases}$$

6. Si scrive l'integrale equivalente e si risolve:

   $$\int \left(-\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-1}\right)dx = 5\log|x-1|-2\log|x+1| + c$$