INFINITI ED INFINITESIMI

DAVIDE TAMBUCHI

1. Definizione di infinitesimo

Per prima cosa, occorrono alcune definizioni dei concetti di infinito e di infinitesimo.

Definizione 1.1. *Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0, escludendo al piú il punto x_0 stesso. Se si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

diremo che $f(x)$ é un infinitesimo, per $x \to x_0$. Se si verifica che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

diremo che $f(x)$ é infinitesimo, per $x \to +\infty$. Infine, se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

diremo che $f(x)$ é infinitesimo, per $x \to -\infty$.

In altre parole, un *infinitesimo* é una quantitá che ha per limite zero. Ad esempio, si ha:

$$\lim_{x \to 1} x^3 - 1 = 0$$

e pertanto $x^3 - 1$ é infinitesimo per $x \to 1$. Analogamente, avendosi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

diremo che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ é infinitesimo per $x \to +\infty$.

Consideriamo ora il rapporto tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Definizione 1.2. *Se si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

con L finito e non nullo diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine. Se si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

diremo che $f(x)$ é un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$. Infine, se si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

diremo che $f(x)$ é un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$.

La presente definizione vale anche se al posto di x_0 sostituiamo $+\infty$ o $-\infty$

1.1. **L'infinitesimo principale.** Consideriamo due o piú funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, e siano tutte infinitesime per $x \to x_0$ (o per $x \to \pm\infty$). Scegliamone una, *a piacere*. La funzione scelta sará chiamata *infinitesimo principale*. Scegliamo ora, come infinitesimo principale,la funzione $f(x)$.

Definizione 1.3. *Sia ora $n \neq 0$ un numero reale. Se si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^n(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

diremo che $g(x)$ é infinitesimo dello stesso ordine di $f^n(x)$, o anche che $g(x)$ é infinitesimo di ordine n rispetto ad $f(x)$. Per $n = 1$, i due infinitesimi sono ovviamente dello stesso ordine, per la precedente definizione[1]*.*

Ad esempio, siano:

$$f(x) = x - 2$$
$$g(x) = \sqrt{x - 2}$$
$$h(x) = (x^2 - 4)^5$$

Tutte queste funzioni sono infinitesime per $x \to 2$. Avendosi:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f^{\frac{1}{2}}(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = 1$$

diremo che $g(x) = \sqrt{x-2}$ é infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto a $f(x) = x - 2$. Analogamente, avendosi:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f^5(x)}{h(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^5}{(x^2-4)^5} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^5}{(x-2)^5(x+2)^5} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+2)^5} = \frac{1}{4^5}$$

diremo che $h(x) = (x^2 - 4)$ é infinitesimo di ordine 5 rispetto a $f(x) = x - 2$.

Notiamo che non é corretto parlare di infinitesimo di ordine n se non si specifica quale funzione viene scelta come infinitesimo principale. Ad esempio, siano $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^3 - 1$. Entrambi sono infinitesimi per $x \to 1$. Scegliendo $f(x) = x - 1$ come infinitesimo principale, ed avendosi

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}$$

diremo che $g(x)$ é infinitesimo di ordine 1 rispetto ad $f(x)$, ovvero che i due infinitesimi sono dello stesso ordine.

2. Infinito

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0, escludento al piú il punto x_0 stesso.

Definizione 2.1. *Se si ha:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

diremo che $f(x)$ é un infinito, per $x \to x_0$. Se si verifica che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

diremo che $f(x)$ é un infinito, per $x \to +\infty$. Infine, se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

diremo che $f(x)$ é un infinito, per $x \to -\infty$.

[1] Nulla cambia,se anziché calcolare il limite del rapporto $\frac{f^n(x)}{g(x)}$ avessimo calcolato il limite del rapporto $\frac{g(x)}{f^n(x)}$

In modo analogo al confronto tra infinitesimi, é possibile confrontare tra di loro gli infiniti. Consideriamo ora il rapporto tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Definizione 2.2. *Se si ha:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

con L finito e non nullo diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine. Se si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

diremo che $f(x)$ é un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$. Infine, se si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

diremo che $f(x)$ é un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$.

La presente definizione vale anche se al posto di x_0 sostituiamo $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, siano $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = x^4 + 2$, $h(x) = x^2 + 3$. Queste funzioni sono tutte degli infiniti, per $x \to +\infty$ (ed anche per $z \to -\infty$). Avendosi poi:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+2} = 0$$

possiamo dire che $g(x)$ é un infinito di ordine superiore rispetto ad $f(x)$, o che $f(x)$ é un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$. Avendosi invece:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = 2$$

possiamo dire che i due infiniti $f(x)$ ed $h(x)$ sono dello stesso ordine.

2.1. **Infinito principale.** Ripetiamo, pari pari, il procedimento per la definizione di infinitesimo principale. Consideriamo due o piú funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, e siano tutte infiniti per $x \to x_0$ (o per $x \to \pm\infty$). Scegliamone una, *a piacere*. La funzione scelta sará chiamata *infinito principale*. Come infinito principale, scegliamo ora la funzione $f(x)$.

Definizione 2.3. *Sia ora $n \neq 0$ un numero reale. Se si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^n(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

diremo che $g(x)$ é infinito dello stesso ordine di $f^n(x)$, o anche che $g(x)$ é infinito di ordine n rispetto ad $f(x)$. Per $n = 1$, i due infiniti sono ovviamente dello stesso ordine, per la precedente definizione[2]

Ad esempio, siano:

$$f(x) = x^3$$
$$g(x) = x^3 + 1$$
$$k(x) = x$$
$$w(x) = \sqrt{x}$$

Tutte le funzioni sono infiniti per $x \to \infty$. Scegliamo $f(x)$ come infinito principale. Avendosi:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f^{\frac{1}{6}}(x)}{w(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

[2]Anche qui, nulla cambia se avessimo calcolato il limite del rapporto $\frac{g(x)}{f^n(x)}$.

diremo che $w(x)$ é infinito di ordine $\frac{1}{6}$ rispetto ad $f(x)$. Avendosi invece

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+1}=1$$

diremo che $g(x)$ é infinito di ordine 1 rispetto ad $f(x)$, o meglio che i due infiniti sono dello stesso ordine. Se scegliamo invece, come infinito principale, la funzione $k(x)=x$ si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^{\frac{1}{2}}(x)}{w(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$$

possiamo dire che $w(x)$ é infinito di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto a $k(x)$.

3. Infiniti e infinitesimi campione

in molte questioni,nel caso in cui x_0 sia *finito*, conviene prendere come *infinitesimo principale* la funzione $f(x)=x-x_0$, e come *infinito principale* la funzione $f(x)=\frac{1}{x-x_0}$. Se invece, si ha $x_0=\infty$, conviene prendere la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ come infinitesimo principale e la funzione $f(x)=x$ come infinito principale. Queste funzioni sono dette *infinitesimi ed infiniti campione*.

3.1. **Esempi.** Sia $g(x)=\sqrt{x^4-x}$. Questa funzione é infinitesimo per $x\to 0$, ed anche per $x\to 1$. Nel primo caso, per determinare l'ordine di infinitesimo, la confrontiamo con la funzione $f(x)=x-0=x$, presa come infinitesimo principale. Avendosi $g(x)=x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=1$$

possiamo dire che $g(x)$ é infinitesima di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione, per $x\to 0$. Nel secondo caso ($x\to 1$) scriviamo $g(x)$ come:

$$g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x^3+x^2+x}$$

e prendiamo $f(x)=x-1$ come infinitesimo campione. Avendosi allora:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f^{\frac{1}{2}}(x-1)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x^3+x^2+x}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$

diremo che $g(x)$ é infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$ rispetto all'infinitesimo campione $f(x)=x-1$, per $x\to 1$.

Sia ora $g(x)=2x^3+1$. Questa funzione é un infinito per $x\to\infty$. Preso come infinito campione la funzione $f(x)=x$, ed avendosi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^3(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3+1}=\frac{1}{2}$$

diremo che $g(x)$ é infinito di ordine 3 rispetto all'infinito campione $f(x)=x$.

Sia ora:

$$g(x)=\frac{1}{(x-4)^4}$$

Avendosi:

$$\lim_{x\to 4}g(x)=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^4}=+\infty$$

possiamo dire che $g(x)$ é un infinito, per $x\to 4$. Come infinitesimo campione, scegliamo dunque la funzione

$$f(x)=\frac{1}{x-4}$$

Avendosi:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f^4(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{(x-4)^4}}{\frac{1}{(x-4)^4}}=1$$

possiamo dire che $g(x)$ é un infinito di ordine 4 rispetto all'infinito campione.

Sia ora:

$$g(x)=\sin x$$

Questa funzione é un infinitesimo, per $x\to n\pi$ con $n\in\mathbb{Z}$ Ad esempio, per $x\to 0$ la possiamo confrontare con l'infinitesimo campione $f(x)=x-0=x$. Avendosi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

diremo che $g(x)$ é infinitesimo di ordine 1, rispetto all'infinitesimo campione $f(x)=x$, per $x\to 0$. Se consideriamo il punto $x=\pi$, la funzione $\sin x$ é ancora un infinitesimo. Prendendo come infinitesimo campione la funzione $f(x)=\frac{1}{x-\pi}$ calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to pi}\frac{g(x)}{f(x)}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$$

Per far ció, introduciamo una nuova variabile:

$$t=x-\pi$$

da cui $x=t+\pi$, e quindi:

$$\lim_{x\to pi}\frac{g(x)}{f(x)}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos\pi+\sin\pi\cos t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

Pertanto, anche per $x\to\pi$ la funzione $\sin x$ é infinitesimo di ordine 1 rispetto all'infinitesimo campione.

4. Parte principale e complementare di un infinitesimoi e di un infinito

Sia $g(x)$ un infinito (o infinitesimo) di ordine n per $x\to x_0$, rispetto ad un infinito (o infinitesimo) principale $f(x)$. Avendosi di conseguenza[3]:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f^n(x)}=L\neq 0$$

con L finito e non nullo, possiamo anche scrivere:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f^n(x)}-L=0$$

Da ció vediamo che la funzione

$$h(x)=\frac{g(x)}{f^n(x)}-L$$

che si trova sotto l'operazione di limite, é infinitesimo per $x\to x_0$. Di conseguenza, in un piccolo intorno di x_0, la funzione $h(x)$ assume valori prossimi a zero, e pertanto, possiamo scrivere:

$$h(x)=\frac{g(x)}{f^n(x)}-L=\alpha(x)$$

ove la funzione $\alpha(x)$ é infinitesimo, per $x\to x_0$ Si ha allora:

$$g(x)=L\cdot f^n(x)+\alpha(x)\cdot f^n(x)$$

[3]Nel confronto degli infinitesimi o degli infiniti, *se si deve calcolarne la parte principale e complementare*, conviene mettere $g(x)$ a numeratore nel calcolo del limite.

Il termine

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x)$$

é detto *Parte principale dell'infinito (o infinitesimo)* $g(x)$, mentre il termine

$$p_c(x) = \alpha(x) \cdot f^n(x)$$

é la sua *parte complementare*.

Il significato della parte principale é il seguente: in un piccolo intorno di x_0, la funzione $p_p(x)$ approssima, a meno di un piccolo errore, la funzione $g(x)$. L'errore commesso é dato dalla parte complementare, che risulta funzione del punto x.

Ad esempio, sia

$$g(x) = 2\sin(x)$$

Questa funzione é infinitesima, per $x \to 0$. Prendiamo come infinitesimo principale l'infinitesimo campione $f(x) = x$. Avendosi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{x} = 2$$

possiamo dire che $g(x)$ é infinitesimo di ordine uno rispetto all'infinitesimo campione. Avendosi poi $L = 2$, possiamo calcolare la parte principale:

$$p_p(x) = L \cdot f(x) = 2x$$

Ció significa che, nell'intorno del punto $x_0 = 0$, la funzione $2\sin x$ puó essere approssimata dalla sua parte principale (a meno di un errore, dato dalla sua parte complementare, infinitesimo per $x \to x_0 = 0$). Il significato della parte principale e della parte complementare é rappresentato in figura 1.

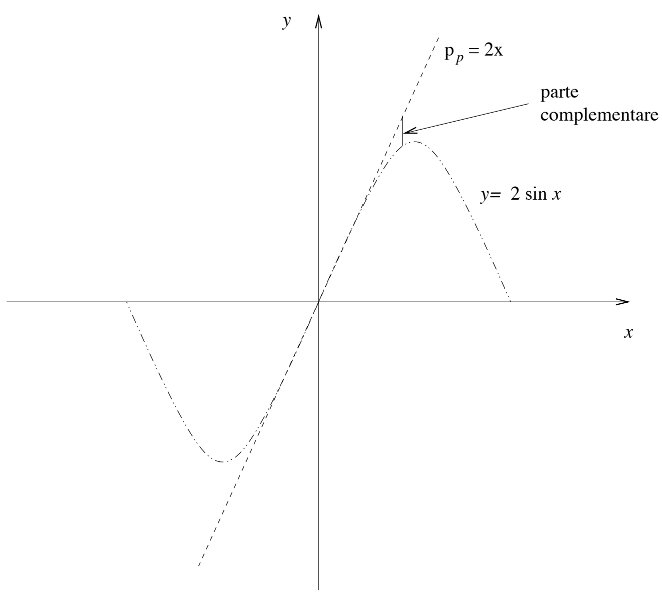

Figura 1. Parte principale e complementare

Sia ora:

$$g(x) = \sqrt{x + 4 + \log(\frac{-x}{4})}$$

Questa funzione é un infinitesimo per $x \to -4$. Prendiamo l'infinitesimo campione $f(x) = x + 4$. Avendosi:

$$\lim_{x\to -4} \frac{g(x)}{f^{\frac{1}{2}(x)}} = \lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+4+\log(\frac{-x}{4})}}{\sqrt{x+4}} = 1$$

possiamo dire che $g(x)$ é infinitesimo di ordine $n = \frac{1}{2}$ rispetto all'infinitesimo campione. Avendosi inoltre $L = 1$, possiamo calcolare la parte principale dell'infinitesimo:

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x) = \sqrt{x+4}$$

Prendiamo ora la funzione

$$g(x) = \sqrt{4x+3}$$

Osserviamo inoltre che la funzione $g(x)$ é un infinito per $x \to +\infty$. Possiamo confrontarla con l'infinito campione $f(x) = x$. Avendosi:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{f^{\frac{1}{2}}(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{4} = 2$$

La funzione $g(x)$ é un infinito di ordine $n = \frac{1}{2}$ rispetto all'infinito campione. Avendosi $L = 2$, la sua parte principale é:

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x) = 2\sqrt{x}$$

Ció significa che in un intorno di $+\infty$, cioé per x molto grande, la funzione $p_p(x)$ é una approssimazione di $g(x)$, a meno di termini infinitesimi per $x \to +\infty$.

Per esercizio, calcoliamo l'ordine di infinitesimo e la parte principale della funzione:

$$g(x) = \frac{6}{\sqrt{x+5}}$$

Questa funzione é un infinitesimo per $x \to +\infty$. Prendiamo l'infinitesimo campione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Avendosi:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{f^{\frac{1}{2}(x)}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{6}{\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}} = 6$$

possiamo dire che $g(x)$ é infinitesimo di ordine $n = \frac{1}{2}$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$. Avendosi poi $L = 6$, possiamo calcolarne la sua parte principale:

$$p_p(x) = L \cdot f^n(x) = \frac{6}{\sqrt{x}}$$

Sempre per esercizio, osserviamo che la precedente funzione

$$g(x) = \frac{6}{\sqrt{x+5}}$$

é un infinito, per $x \to -5$. Preso l'infinito campione:

$$f(x) = \frac{1}{x+5}$$

e calcolato il limite:

$$\lim_{x\to -5} \frac{g(x)}{f^{\frac{1}{2}(x)}} = \lim_{x\to -5} \frac{\frac{6}{\sqrt{x+5}}}{\sqrt{\frac{1}{x+5}}} = 6$$

possiamo calcolare la parte principale dell'infinito $g(x)$ come:

$$p_p(x) = L \cdot f^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{6}{\sqrt{x+5}}$$

coincidente, in questo caso, con la funzione stessa.

5. Avvertenza

Questo documento puó essere liberamente distribuito, purché senza modifiche, integralmente, gratuitamente e senza scopo di lucro o altri scopi commerciali. Ogni cura é stata posta nella stesura del documento. Tuttavia l'Autore non puó assumersi alcuna responsabilitá derivante dall'utilizzo della stessa. Ultimo aggiornamento: 8 febbraio 2004. Per la segnalazione di errori e *bugs* contattare l'autore all'indirizzo email: `davide.tambuchi@tin.it`.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Amerio. *Analisi Matematica, con Elementi di Analisi Funzionale – volume primo*, U.T.E.T., Torino, (1977).
[2] B. P. Demidovič. *Esercizi e Problemi di Analisi Matematica*, Editori Riuniti, Roma, (1983).
[3] W. Rudin. *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill, Milano, (1996).
[4] V. I. Smirnov. *Corso di Matematica Superiore, volume primo*, Editori Riuniti, Roma, (1993).

Typeset by LaTeX 2_ε *under* `LINUX`