Vettori Aleatori

✪ Sommario:
- Normali multivariate;
- Vettori gaussiani;
- Variabili aleatorie congiuntamente gaussiane.

✪ Richiami di algebra lineare:
- $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$.
- $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n \times m)$.
- $(A \cdot B)_{ij} = \sum_n A_{in} B_{nj}$ con $B \in \mathrm{M}(m,k)$.
- $\vec{x}^T \cdot \vec{x} = \sum_i x_i^2 = \|\vec{x}\|^2$.

✪ Definizioni:
- **Normale Standard:** $\vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix}$ vettore aleatorio è normale standard se:
  - $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0,1)$.
  - Indipendenti.
- **Media:** sia $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ vettore aleatorio → $E(\vec{X}) := (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$.
- **Vettore normale:** $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ è normale se $\exists$ $\vec{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$ vettore aleatorio normale standard, $\underline{A} \in \mathrm{M}(n \times m)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ tale che $\vec{X} = \vec{A}\vec{Z} + \vec{\mu}$.

✪ Matrice di Covarianza:
- **Definizione:** sia $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$, si definisce matrice di covarianza

$$\underline{C}_{\vec{X}} := \begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) & \dots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2) & \dots & Cov(X_2,X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(X_m,X_1) & Cov(X_m,X_2) & \dots & Cov(X_m,X_n) \end{pmatrix}.$$

- **Proprietà:**
  - $C_{ii} = Var(X_i)$, sulla diagonale maggiore abbiamo le varianze di X_i.

- $C = C^T$ → è una matrice simmetrica.
- Se $X_1,\ldots,X_n$ sono indipendenti $\Rightarrow$ è una matrice diagonale. Ricordiamo che la covarianza di due variabili indipendenti è uguale a 0.
- Sia $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$, $\underline{C} \geq 0 \Leftrightarrow \vec{a}^T \underline{C}\vec{a} \geq 0, \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$. In parole la matrice è semidefinita positiva (gli auto valori non possono essere negativi).
  - Dimostrazione:
    $$0 \leq Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \overset{Var(Y)=Cov(Y,Y)}{=} Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^n a_j X_j\right) = \sum_{i,j} a_i a_j Cov\left(X_i, X_j\right) = \sum_{i,j} a_i a_j \underline{C}_{ij} =$$
    $$= \sum_i a_i \overbrace{\left(\sum_j a_j \underline{C}_{ij}\right)}^{=(\underline{C}\vec{a})_i} = \sum_i a_i \left(\underline{C}\vec{a}\right)_i = \vec{a}^T \underline{C}\vec{a} \geq 0 \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n.$$
- Sia $\vec{X} = \vec{A}\vec{Z} + \vec{\mu}$ un vettore aleatorio.
  - $E\left[\vec{X}\right] = E\left[\vec{A}\vec{Z} + \vec{\mu}\right] = \vec{A} \overset{=0}{E\left[\vec{Z}\right]} + \vec{\mu} = \vec{\mu}$.
  - $C_{ij} = Cov\left(X_i, X_j\right) = Cov\left(\left(\vec{A}\vec{Z} + \vec{\mu}\right)_i, \left(\vec{A}\vec{Z} + \vec{\mu}\right)_j\right) = Cov\left(\sum_h A_{ih} Z_{ih} + \overset{numero}{\cancel{\mu_i}}, \sum_k A_{jk} Z_{jk} + \overset{numero}{\cancel{\mu_j}}\right) =$
    $\sum_h \sum_k A_{ih} A_{jk} Cov\left(Z_h, Z_k\right) = \sum_{h,k} A_{ih} A_{jk} \overset{kroneker}{\delta(h,k)} = \sum_h A_{ih} A_{jh} = \sum_h A_{ih} \left(A^T\right)_{hj} = \left(\vec{A}\vec{A}^T\right)_{ij}$. →
    $C_{\vec{X}} = \vec{A}\vec{A}^T$.

✪ Vettori Gaussiani

- $Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.
- $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ → $X = \sigma Z + \mu$. Dalla definizione segue: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow aX + b \sim N(*,*)$.
- Nota: $\vec{Z}$ è normale standard.