Statistica

ARGOMENTI

  - Quando
  - Funzione di massa, valore atteso, varianza
  - Somma
- V.a. di Poisson
  - Quando
  - Funzione di massa, funzione generatrice dei momenti, valore atteso, varianza
  - Approssimazione della binomiale
  - Somma
- V.a. geometriche
  - Quando
  - Funzione di massa, valore atteso, varianza
- V.a. ipergeometriche
  - Quando
  - Funzione di massa, valore atteso
- V.a. di uniformi
  - Quando
  - Funzione di densità, valore atteso, varianza, funzione di ripartizione
- V.a. di Gauss o normali
  - Quando
  - Funzione di densità, valore atteso, varianza
  - Trasformazione lineare
  - Somma di normali indipendenti
  - Variabili aleatoria normali standard
- V.a. esponenziale
  - Quando
  - Funzione di densità, valore atteso,varianza
- V.a.di tipo Gamma
  - Quando
  - Funzione di densità, valore atteso, varianza
  - Somma di variabili di tipo gamma indipendenti
- V.a. di tipo Chi quadro
  - Quando
  - Funzione di densità, valore atteso, varianza
  - Somma di variabili di tipo Chi quadro indipendenti

Calcolo combinatorio

Disposizioni semplici

Si dicono **disposizioni semplici di parametri n e k** e si indicano con $D(n,k)$ il numero totale di stringhe che è possibile ottenere prendendo k elementi da un insieme costituito da n elementi senza che questi si ripetano e considerando che stringhe costituite dagli stessi elementi ma ordinati in maniera differente sono considerate stringhe differenti.

$$D(n,k) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

Disposizioni con ripetizione

Si dicono **disposizioni con ripetizione di parametri n e k** e si indicano con $D_r(n,k)$ il numero totale di stringhe che è possibile ottenere prendendo k elementi da un insieme costituito da n elementi considerando che ciascun elemento può essere ripetuto più di una volta.

$$D(n,k) = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$$

Permutazioni semplici

Si dicono **permutazioni semplici di parametro n** e si indicano con P(n) il numero di modi in cui è possibile riordinare una stringa di n elementi. Le permutazioni semplici sono un caso particolare di disposizioni semplici in cui il parametro n e quello k si equivalgono.

$$P(n) = \boldsymbol{n}!$$

Permutazioni con ripetizione

Si dicono **permutazioni con ripetizioni di parametro n** e si indicano con $P_r(n)$ il numero di modi in cui è possibile riordinare una stringa di n elementi considerando che esistono un certo numero di elementi che si ripetono.

$$P(n) = \frac{\boldsymbol{n}!}{\sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{i}}!}$$

Dove k_i indica il numero di volte che si ripete l'elemento i.

Combinazioni semplici

Si dicono **combinazioni semplici di parametri n e k** e si indicano con $C(n,k)$ il numero totale di stringhe che è possibile ottenere prendendo k elementi da un insieme costituito da n elementi senza che questi si ripetano e considerando che stringhe costituite dagli stessi elementi ma ordinati in maniera differente sono considerate come la stessa stringa.

$$C(n,k) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!\,\boldsymbol{k}!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

Probabilità

Assiomi di probabilità

Una regola (o funzione) che associa ad ogni evento E un numero P(E) è una probabilità se:

- $0 \leq P(E) \leq 1$
- Se E coincide con tutti i possibili risultati di un esperimento aleatorio allora $P(E) = 1$ e viceversa
- Se $E \cap F = 0$ allora $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Evento complementare

Si dice "evento complementare di E" e si indica con $\overline{E}$ l'evento che si verifica quando non si verifica E.

Com'è facilmente deducibile $E \cup \overline{E}$ dà l'evento certo e quindi $P\left(E \cup \overline{E}\right) = P(E) + P\left(\overline{E}\right) = 1$.

Eventi compatibili ed incompatibili

Due eventi si dicono **incompatibili** se la loro intersezione è l'insieme vuoto, in caso opposto gli eventi si dicono **compatibili**.

Eventi dipendenti ed indipendenti

Due eventi si dicono **indipendenti** se vale $P(E \cap F) = P(E)P(F)$. Si dicono **dipendenti** in ogni altro caso.

Somma di eventi incompatibili e compatibili (unione insiemistica)

Siano E ed F due eventi: ci chiediamo quale sia la probabilità che si verifichi **almeno** uno di essi.

Nel caso in cui i due eventi sono incompatibili grazie all'assioma di probabilità sappiamo che

$\boldsymbol{P(E \cup F) = P(E) + P(F)}$

(In presenza di più eventi mutuamente indipendenti la regola di cui sopra è ancora valida)

Nel caso in cui i due eventi sono compatibili invece sappiamo che la loro intersezione non è nulla, ovvero che $E \cap F = G \neq 0$ e che quindi sia l'evento E che l'evento F sono costituiti entrambi da un insieme incompatibile (H e I) ed uno compatibile condiviso (G).

Possiamo pertanto concludere che $P(E \cup F) = P(H \cup G \cup I \cup G) = P(H) + 2P(G) + P(I)$ il che implica

$\boldsymbol{P(E \cup F) - P(G)} = P(H) + P(G) + P(I)$ che è la probabilità che ci interessa.

Probabilità condizionata

La **probabilità condizionata** indica la probabilità che si verifichi un determinato evento E sapendo che un altro evento F si è verificato.

Usando la notazione scriveremo $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

Proprietà:

- $P(\overline{E}|F) = 1 - P(E|F)$
- $P(E|\overline{F}) = 1 - P(E|F)$
- $P(T|N) = \frac{P(N \cap T)}{P(N)} = \frac{P(T)P(N|T)}{P(N)}$ (formula di **Bayes**)

Variabili aleatorie

Le variabili aleatorie sono quantità che dipendono dall'esito di un esperimento casuale ma non conservano traccia di come esso si sia svolto realmente *(ad esempio lanciando due dadi vogliamo sapere la loro somma: indipendentemente dall'esito dell'esperimento il valore assunto dai singoli dadi non ci interessa)*.

Funzione di ripartizione

Sia X una variabile aleatoria, la sua **funzione di ripartizione** è definita come

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Essa indica la probabilità che la variabile aleatoria X assuma un valore pari o inferiore ad x.

La funzione di ripartizione gode delle seguenti proprietà:

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

Funzione di massa

Sia X una variabile aleatoria **discreta,** si dice **funzione di massa** e si indica con $p(x)$ la probabilità che la variabile aleatoria assuma esattamente il valore x:

$$p(x) = P(X = x)$$

La somma della funzione di massa per ciascun valore di a è pari ad 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(a_i)$$

Funzione di densità

Sia X una variabile aleatoria **continua**, si dice **funzione di densità** e si indica con $f(x)$ la distribuzione di probabilità relativa alla variabile aleatoria X. Essa ha la stessa utilità della funzione di massa per le variabili aleatorie discrete.

Usando altri termini diremo che la funzione di densità è la **derivata** della funzione di ripartizione.

Tutte le probabilità associate alla variabile aleatoria X possono essere scritte integrando usando opportuni estremi la funzione di densità:

- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Valore atteso

Il **valore atteso** di una variabile aleatoria discreta (o media) non è altro che la media pesata di tutti i valori che può assumere X moltiplicati per la loro rispettiva probabilità ed indica il valore medio assunto dalla v.a. per un numero di prove tendente ad infinito:

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$

Per una variabile aleatoria continua vale invece:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria

E' possibile dimostrare che **valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria** $E(g(x))$ è pari a:

Nel caso di v.a. **discreta:**

$$E[g(x)] = \sum_i g(x_i) p(x_i)$$

Nel caso di v.a. **continua:**

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

La precedente definizione è utile quando, data una variabile aleatoria X, vogliamo conoscere il comportamento di un'altra variabile aleatoria Y che è dipendente da X secondo una funzione g(X).

Caso notevole – $Y = \alpha X + \beta$

Nel caso in cui la funzione $g(x)$ di cui sopra sia nella forma $g(x) = \alpha x + \beta$ è possibile dimostrare che per ogni v.a. continua o discreta vale:

$$E(\alpha x + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

Le dimostrazioni sia per il caso discreto che per quello continuo sono banali quindi non vengono riportate (basta usare la definizione del precedente paragrafo)

Momento n-esimo di una v.a.

Si dice **momento n-esimo** di una v.a. il valore atteso $E(X^n)$.

Usando una notazione più compatta:

$$E(X^n) = \begin{cases} \sum_i x^n p(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx \end{cases}$$

NB: Il valore atteso di una v.a. è anche detto **momento primo**

Varianza

Sia X una variabile aleatoria con valore atteso (o media) $E(X) = \mu$, chiamiamo **varianza** il valore:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

La varianza quantifica la variabilità dei valori assunti dalla variabile aleatoria rispetto alla propria media.

Partendo dalla definizione $Var(X) = E[\left(X - E(X)\right)^2]$ si ricava che la varianza può essere scritta anche come:

$$\boldsymbol{Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2}$$

Proprietà della varianza

Di seguito vengono illustrate alcune proprietà della varianza:

- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$
- $Var(\beta) = 0$ con β valore numerico costante
- $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$

Deviazione standard

Dicesi **deviazione standard** o **scarto quadratico medio** e si indica con σ la radice quadra della varianza:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Covarianza

Siano date due variabili aleatorie X ed Y con valori attesi E(X) ed E(Y), si dice **covarianza di X ed Y** e si indica con $Cov(X,Y)$ il valore seguente:

$$Cov(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Dall'ultima definizione di covarianza è facilmente intuibile che $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$, inoltre si può notare come la covarianza estende il concetto di varianza in quanto $Cov(X,X) = E(XX) - E(X)E(X) = Var(X)$.

Teorema sulle variabili aleatorie indipendenti

Se X ed Y sono due v.a. indipendenti, valgono le seguenti proprietà:

- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $Cov(X, Y) = 0$

Coefficiente di correlazione lineare

Si dice **coefficiente di correlazione lineare** e si indica con $Corr(X, Y)$ il valore compreso tra -1 ed 1:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Il coefficiente di correlazione lineare misura qualitativamente la forza della relazione tra X ed Y: per valori crescenti di correlazione lineare le v.a. X ed Y tenderanno ad assumere valori grandi o piccoli contemporaneamente.

Funzione generatrice dei momenti

Si dice **funzione generatrice dei momenti** di una variabile aleatoria discreta e si indica con ϕ il valore:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x} e^{tx} p(x)$$

Nel caso di variabile aleatoria continua invece:

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$$

La funzione generatrice dei momenti è particolarmente utile in quanto permette di individuare tutti i momenti n-esimi calcolando la derivata n-esima della funzione $\phi(t)$ rispetto a t stessa ponendo $t = 0$, ovvero:

- $\boldsymbol{E(X^1)}$: $\frac{d}{dt} E(e^{tX}) = E\left(\frac{d}{dt} e^{tX}\right) = E(Xe^{tX}) \underbrace{=}_{t=0} \boldsymbol{E(X)}$
- $\boldsymbol{E(X^2)}$: $\frac{d^2}{dt^2} E(e^{tX}) = E\left(\frac{d^2}{dt^2} e^{tX}\right) = E(X^2 e^{tX}) \underbrace{=}_{t=0} \boldsymbol{E(X^2)}$
- In generale avremo → $\boldsymbol{E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} \phi(0)}$

Disuguaglianza di Markov

Sia X una variabile aleatoria sempre positiva, allora vale:

$$P(X \geq a) = \frac{E(X)}{a} \quad \forall a > 0$$

Dimostrazione: (mancante)

Disuguaglianza di Chebyshev

Sia X una variabile aleatoria con media μ e varianza σ^2, la **disuguaglianza di Chebyshev** ci assicura:

$$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

Dimostrazione: (mancante)

Legge dei grandi numeri

Siano $X_1, \dots, X_n$ n v.a. indipendenti, identicamente distribuite e con la stessa media $E(X_i) = \mu$ allora:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xn - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0 \ \forall \varepsilon > 0$$

Dimostrazione: (mancante)

Modelli di variabili aleatorie

Variabili aleatorie di Bernoulli

$\boldsymbol{X \sim Be(p)}$

Quando

Immaginiamo di effettuare una prova il cui unico risultato può essere "successo" con probabilità **p** o "fallimento" con probabilità **1-p.** Una v.a. X si dice **bernoulliana** di parametro p se assume valore 1 in caso di successo della prova e 0 in caso contrario. X è una v.a. **discreta**.

Funzione di massa

Dalla definizione:

$$\begin{cases} P(X = 0) = 1 - p \\ P(X = 1) = p \end{cases}$$

Valore atteso

Usando la definizione di **momento primo:**

$$E(X) = \sum x^1 p(x) = 0(1 - p) + 1p = p$$

$$E(X) = p$$

Varianza

Usando la definizione di **momento secondo:**

$$E(X^2) = \sum x^2 p(x) = 0(1 - p) + 1^2 p = p$$

Usando la definizione di **varianza:**

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p^2 - p = p(1 - p)$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Variabili aleatorie binomiali

$\boldsymbol{X \sim Bi(n, p)}$

Quando

Immaginiamo di effettuare **n** prove il cui risultato può essere solamente “successo” con probabilità **p** e “fallimento” con probabilità **1-p**. Una v.a. X si dice **binomiale** di parametro n e p se indica il numero totale di “successi” ottenuti effettuando le n prove. X è una v.a. **discreta**.

Funzione di massa

La funzione di massa può essere trovata considerando una stringa di n eventi, in cui i primi i si verificano con probabilità p e gli altri (n-i) non si verificano (con probabilità 1-p). Usando la definizione di somma di eventi indipendenti si ha che:

$$P(\text{"i primi i eventi si verificano"}) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{i} + \underbrace{(1-p)(1-p) \ldots (1-p)}_{n} = p^i (1-p)^{n-i}$$

A questo punto consideriamo in quanti modi diversi è possibile riordinare la stringa considerando che gli elementi “si è verificato” si ripetono i i volte, mentre gli elementi “non si è verificato” si ripetono (n-i) volte. Per fare ciò ricorriamo alla definizione di **permutazioni con ripetizioni** di ordine n:

$$P(X = i) = \frac{n!}{(n-i)!\, i!} p^i (1-p)^{n-i}$$

Notiamo che in questo caso specifico le permutazioni con ripetizioni assumono la stessa forma delle combinazioni semplici $C(n, i)$ e quindi otteniamo la formula:

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad per\ i: 1, \ldots, n$$

Valore atteso

Dalla definizione di variabili binomiali si ha che X non è altro che la somma di n v.a. bernoulliane uguali, pertanto:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

La v.a. $X_i \sim Be(p)$ ha :

$$E(X_i) = p \qquad\qquad Var(X_i) = p(1-p)$$

Sfruttando le **proprietà del valore atteso** si ha che:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

Varianza

Sfruttando le **proprietà della varianza** si ha che:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

Somma

La somma di due variabili aleatorie binomiali indipendenti di parametri (n,p) e (m,p) è ancora una variabile aleatoria binomiale di parametri (n+m,p)

$$X \sim Bi(n, p) + Y \sim Bi(m, p) = Z \sim (n + m, p)$$

La dimostrazione è banale in quanto occorre ricordarsi che X ed Y non sono altro che la somma di n ed m variabili aleatorie bernoulliane e quindi la loro somma non è altro che la somma di n ed m variabili aleatorie. Se X ed Y hanno lo stesso parametro p allora la somma degli n+m elementi soddisfa la definizione di variabile aleatoria di tipo binomiale.

Variabili aleatorie di Poisson

$\boldsymbol{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$

Quando

Funzione di massa

Consideriamo la somma di un numero n di prove bernoulliane, in cui il valore medio di successi nelle prove è un numero λ (es: effettuo cento prove di cui mediamente 5 prove danno esito positivo, quindi $n = 100, \lambda = 5$). Ogni singola prova ha pertanto una probabilità $p = \frac{\lambda}{n}$ di dare esito positivo.

La somma delle varie prove è pertanto una variabile aleatoria binomiale $X \sim Bi(n, \frac{\lambda}{n})$.

Immaginiamo a questo punto di effettuare un numero infinito di prove e di chiederci qual'è la probabilità che il numero di successi ottenuto sia pari a k, utilizzando la funzione di massa delle binomiali si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} P(X=k) = \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k!)}\frac{\lambda^k}{n^k}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{\to n^k}(n-k)!}{n^k(n-k)!}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)e^{-\lambda} = \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)e^{-\lambda}$$

$$P(X=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \qquad per\ i{:}\, 1, \ldots, n$$

Funzione generatrice dei momenti

Usando la definizione di f.g.m.:

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{ti}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!}$$

Cosideriamo che la sommatoria è lo sviluppo di Taylor della funzione $e^{\lambda e^t}$ e quindi

$$\phi(t) = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\phi(0) = 1$$

Valore atteso

Utilizzando la funzione generatrice dei momenti:

$$E(X) = \frac{d}{dt}\phi(0) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} = \lambda e^t \phi(t) \underbrace{=}_{t\to 0} \lambda$$

Varianza

Calcoliamo il **momento secondo** della v.a.:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}\phi(0) = \frac{d}{dt}\big(\lambda e^t \phi(t)\big) = \lambda\big(e^t \phi(t) + e^t \phi'(t)\big) \underbrace{=}_{t \to 0} \lambda\big(1 + E(X)\big) = \lambda(1+\lambda) = \lambda + \lambda^2$$

Usando la definizione di varianza:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

Approssimazione della binomiale

Una variabile aleatoria binomiale $X \sim Bi(n,p)$ può essere approssimata ad una variabile aleatoria di Poisson $Y \sim \mathcal{P}(np)$ se n è molto grande e p è molto piccolo.

Somma

La somma di due variabili poissoniane indipendenti di parametri λ e μ è ancora una variabile aleatoria poissoniana di parametro $\lambda + \mu$

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) + Y \sim \mathcal{P}(\mu) = Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Variabili aleatorie geometriche

$\boldsymbol{X \sim Geom(p)}$

Quando

Immaginiamo di avere una successione di prove di Bernoulli di parametro p. Una v.a. X si dice **geometrica** di parametro p se indica il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo della successione.

Funzione di massa

$P(X = i) = p(1 - p)^{i-1} \qquad per\ i \geq 1$

Valore atteso

Varianza

Variabili aleatorie ipergeometriche

$\boldsymbol{X \sim Iper(N, M, n)}$

Quando

Supponiamo di avere un insieme costituito da N+M oggetti, N dei quali possiedono delle proprietà interessanti. Una v.a. X si dice **ipergeometrica** di parametri N, M, n se X denota il numero di oggetti "interessanti" presenti in un campione costituito da n elementi estratti a caso dall'insieme originale.

Funzione di massa

$$P(X = i) = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}} \qquad per\ i: 1, \dots, n$$

Valore atteso

$$E(X) = n\frac{N}{N+M}$$

Variabili aleatorie uniformi

$\boldsymbol{X \sim U(a, b)}$

Quando

Funzione di densità

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & per\ a \leq x \leq b \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Valore atteso

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Funzione di ripartizione

Variabili aleatorie Gaussiane o normali

$\boldsymbol{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$

Quando

Funzione di densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \forall X \in R$$

Valore atteso

$E(X) = \mu$

Varianza

$Var(X) = \sigma^2$

Trasformazione lineare

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ed Y una v.a. definita come $Y = \alpha X + \beta$. Si può dimostrare che Y è ancora una variabile aleatoria normale di parametri $\alpha\mu + \beta$ e $\alpha^2\sigma^2$

$$Y = \alpha\big(X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)\big) + \beta \rightarrow Y \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$$

Somma di normali indipendenti

La somma di variabili aleatorie normali indipendenti di parametri (μ_1, σ_1^2) e (μ_2, σ_2^2) è ancora una variabile aleatoria normale di parametri $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$$X \sim (\mu_1, \sigma_1^2) + Y \sim (\mu_2, \sigma_2^2) = Z \sim (\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Variabili aleatorie normali standard

Si può dimostrare che sia data una v.a. X normale di parametri μ e σ, è possibile costruire una v.a. Z normale di parametri 0 ed 1 imponendo:

$$Z = \frac{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) - \mu}{\sigma} \rightarrow Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Z è detta variabile aleatoria normale **standard**.

Variabili aleatorie Esponenziale

$\boldsymbol{X \sim \mathcal{E}(\lambda)}$

Quando

Funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Valore atteso

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Variabili aleatorie di tipo Gamma

$\boldsymbol{X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)}$

Quando

Funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Dove $\Gamma(\alpha)$ è la **funzione gamma di Eulero,** ovvero quel valore che normalizza il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

NB: La funzione gamma di Eulero estende il concetto di fattoriale a tutto l'insieme dei numeri reali, pertanto se α è un numero intero allora $\Gamma(\alpha) = \alpha!$

Valore atteso

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Varianza

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Somma di variabili di tipo Gamma indipendenti

La somma di due v.a. di tipo gamma indipendenti di parametri (α_1, λ) e (α_2, λ) è ancora una variabile aleatoria di tipo gamma di parametri $(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$

$$X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda) + Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda) = Z \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

Variabili aleatorie di tipo Chi quadro

$\boldsymbol{X \sim \chi^2(n)}$

Quando

Una v.a. X si dice di tipo **chi quadro** di parametro n se rappresenta la somma dei quadrati di n variabili aleatorie standard Z.

Funzione di densità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

NB: Se X è una variabile aleatorio di tipo chi quadro, allora X è anche una variabile di tipo gamma con parametri $(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$$X \sim \chi^2(n) \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Valore atteso

$$E(X) = n$$

Varianza

$$Var(X) = 2n$$

Somma di variabili di tipo Chi quadro indipendenti

La somma di due v.a. di tipo chi quadro indipendenti di parametri n ed m è ancora una variabile aleatoria di tipo chi quadro di parametro n+m

$$X \sim \chi(\mathrm{n}) + Y \sim \chi(\mathrm{m}) = Z \sim \chi(\mathrm{n} + \mathrm{m})$$