Alex Gotev

Prova orale di Geometria, A.A. 2009/2010, prof. Raffaele Scapellato
Elenco dei teoremi richiesti con dimostrazione

1. Annullamento del prodotto per gli spazi vettoriali

Proposizione (2.2.2, pag. 38)

$Sia: \; k \in K, \;\; v \in V \quad (k\ scalare, v\ vettore)$

$Si\ ha\ kv = 0\ se\ e\ solo\ se\ k = 0\ oppure\ v = 0$

Dimostrazione

$Si\ consideri \quad kv = v(0+k) \quad \rightarrow \quad kv = v0 + kv \quad \rightarrow \quad 0 = v0$

$Si\ consideri\ anche \quad kv = k(0+v) \quad \rightarrow \quad kv = k0 + kv \quad \rightarrow \quad 0 = k0$

$Viceversa\ se \quad kv = 0\ e\ k \neq 0,\ \ esiste\ k^{-1} \in K \quad tale\ che\ v = k^{-1}(kv) = k^{-1} \cdot 0 = 0$

2. Isomorfismo tra uno spazio vettoriale di dimensione n e K^n.

Proposizione (Teorema 5.1.6, pag. 86)

$Sia\ V(K)\ uno\ spazio\ vettoriale\ contenente\ una\ base\ B = (v_1, v_2, .., v_n).$

$Esiste\ un\ isomorfismo\ T_B\ da\ V(K)\ a\ K^n$, $che\ si\ ottiene\ facendo$ $corrispondere\ ad\ ogni\ vettore\ la\ n-upla\ delle\ sue\ coordinate\ rispetto\ alla\ base.$

Dimostrazione

La proposizione assicura che la funzione T_B descritta è ben definita ed è una biiezione. Essa è anche lineare, infatti si considerino:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad\qquad v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

$$allora \quad (u+v) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i$$

$$dunque \quad T_B(u+v) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \; = \; T_B(u) + T_B(v)$$

$$inoltre \quad ku = \sum_{i=1}^{n} k\, a_i v_i \qquad quindi\ si\ ha \quad T_B(ku) = (ka_1, \ldots, k\, a_n) \; = \; kT_B(u)$$

3. Teorema di interpolazione.

Proposizione (Teorema 6.1.6, pag. 96)

Siano $V(K)$ *e* $V'(K)$ *spazi vettoriali, sia* $\{v_{1,}\ldots,v_n\}$ *una base di V.*
Per ogni $w_{1,}\ldots,w_n \in V'$ *esiste un'unica funzione lineare*

$$T:V\to V'$$

$$\text{tale che } T(v_1)=w_{1,}\ T(v_2)=w_{2,}\ldots,\ T(v_n)=w_n$$

Dimostrazione

Il generico $v \in V$ *si può scrivere nella forma:* $v=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Definiamo: $T(v)=\sum_{i=1}^{n} a_i w_{i.}$

La linearità si verifica direttamente, mostrando l'esistenza della funzione con le proprietà richieste.

Per quanto riguarda l'unicità, sia $T_1:V\to V'$ *una F.L. tale che*

$$T_1(v_i)=w_i \quad \text{per ogni } i=1,\ldots,n$$

$$\text{allora } T_1(v)=T_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T_1(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(v),\quad \text{quindi } T_1=T$$

4. Indipendenza di autovettori relativi ad autovalori distinti.

Proposizione (Proposizione 7.1.7, pag. 109)

Sia $T:V\to V$ *lineare. Se* $v_{1,}\ldots,v_k$ *sono autovettori di T corrispondenti ad autovalori distinti* $\lambda_{1,}\ldots,\lambda_k$, *allora* $v_1,\ldots,v_k$ *sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione

Procediamo per induzione su k:
se $k=1$ *l'autovettore* v_1 *non è nullo e quindi è indipendente.*

Sia ora $k>1$ *e supponiamo che* $a_1 v_1+\ldots+a_n+v_n=0$

Applicando T si ha anche, per linearità

$$a_1 T(v_1)+\ldots+a_k T(v_k)=0,\quad \text{cioè}\quad a\lambda_1 v_1+\ldots+a_k\lambda_k v_k=0$$

Sottraendo la prima uguaglianza moltiplicata per λ_k *dall'ultima, si ottiene:*

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)v_1+\ldots+a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)v_{k-1}=0$$

Per l'ipotesi induttiva $v_{1,}\ldots,v_{k-1}$ *sono indipendenti e quindi*

$$a_1(\lambda_1-\lambda_k)=\ldots=a_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)=0$$

da cui $a1=\ldots=a_{k-1}=0$ *e quindi anche* $a_k v_k=0$ *e* $a_k=0$

5. Caratterizzazione degli autovalori come radici del polinomio caratteristico

Proposizione (Teorema 7.2.1, pag. 109)

T: *Endomorfismo di uno spazio n-dimensionale $V^n(K)$*
A: *Matrice associata a T rispetto ad una base B*

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. *Lo scalare* $\lambda \in K$ *è autovalore di T*
2. *Esiste* $x \neq 0$ *in K^n tale che $Ax = \lambda x$*
3. $det(A - \lambda I_n) = 0$

Dimostrazione

Se $x = T_B(v)$,

$T(v) = \lambda v$ *se e solo se* $Ax = \lambda x$.

Dunque λ è autovalore se e solo se il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n) = 0$ ha una soluzione non nulla, che si verifica se e solo se $det(A - \lambda I_n) = 0$

6. Caratterizzazione delle matrici associate a endomorfismi simmetrici.

Proposizione (Proposizione 9.1.3, pag. 140)

Sia $B = (e_1, \ldots, e_n)$ *una base ortonormale di V.*

a) *Se x e y sono i vettori colonna delle coordinate di v e w rispetto a B, allora*

$$(v, w) = x^T y \quad \text{nel caso reale}, \qquad (v, w) = x^T \overline{y} \quad \text{nel caso complesso}$$

b) *L'endomorfismo T è simmetrico se e solo se la matrice associata $A = M_B(T)$ è simmetrica, è hermitiano se e solo se la matrice $A = M_B(T)$ è hermitiana cioè $A = \overline{A^T}$*

Dimostrazione

a) *Sia nel caso reale che complesso vale*

$$(v, w) = \sum_j \sum_k x_j y_k (e_j, e_k) = \sum_j x_j y_j = x^T y, \quad \text{perchè } B \text{ è ortonormale}$$

b) *Per **a**), nel caso reale*

$$(T(v), w) = (Ax)^T y = x^T A^T y, \quad \text{mentre} \quad (v, T(w)) = x^T Ay$$

$$\text{Se } A^T = A, \quad \text{allora } (T(v), w) = (v, T(w)) \quad e \quad T \text{ è simmetrico.}$$

$$\text{Viceversa, se } T \text{ è simmetrico scegliendo } \boldsymbol{v = e_j} \text{ e } \boldsymbol{w = e_k} \text{ si ottiene } (A^T)_{jk} = a_{jk}$$

cioè A è una matrice simmetrica.

$$\text{Nel caso hermitiano } (v, T(w)) = x^T \overline{(Ay)} = x^T \overline{A} \overline{y} \quad \text{e si conclude come nel caso reale.}$$

7. Diagonalizzazione delle forme quadratiche

Proposizione (Teorema 9.3.5, pag. 145)
Ogni forma quadratica è diagonalizzabile mediante una trasformazione ortogonale di coordinate

Dimostrazione
Per il teorema spettrale, per ogni matrice reale simmetrica A, esistono:

- *una matrice diagonale D e*
- *una matrice ortogonale P*

tali che:

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = D$$

Dunque A è congruente a D e la forma quadratica associata ad A diventa, mediante la trasformazione ortogonale x = Py, la forma quadratica

$$q'(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \quad \text{dove } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ sono gli autovalori di } A$$

Testo di riferimento:
M. P. Manara, A. Perotti, R. Scapellato - Geometria e algebra lineare, Esculapio, 2a Edizione, 2007.