Prodotto scalare e prodotto vettoriale

- **Prodotto scalare:** Sia V uno spazio vettoriale reale. Una funzione che associa ad ogni coppia di vettori s,w di V un numero reale (s,w) è detta prodotto scalare su V ed ha le seguenti proprietà:
    1. Simmetrica: (s,w)=(w,s)
    2. Bilineare: $(as1 + bs2, w) = a(s1, w) + b(s2, w)$

    $$(w, as1 + bs2) = a(w, s1) + b(w, s2)$$

    3. È definita positiva: $(s, s) \geq 0 \quad (s, s) = 0 \leftrightarrow s = 0$

    Uno spazio vettoriale a cui è assegnato un prodotto scalare sarà definito spazio vettoriale metrico

Esempi

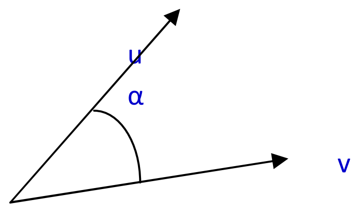
1. Prodotto scalare canonico su R^N
   x=(x1,….)
   y=(y1,….)
   allora: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = xy^T$
   Verifico le tre proprietà:

   $$1. (y, x) = yx^T = (y, x^T)^T = (x^T)^T y^T = xy^T = (x, y)$$

   $$2. (as1 + bs2)w = (as1 + bs2)w^T = a(s1w^T) + b(s2w^T) = a(s1, w) + b(s2, w)$$

   $$3. (x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \Rightarrow \forall i \quad x_i = 0 \Rightarrow x = 0$$

2. Prodotto scalare in R^3
   $(u, v) = |u||v| \cos\alpha$ -----> prodotto scalare di vettori geometrici



In particolare se ho due vettori v paralleli avrò come prodotto scalare:

$$(v, v) = |v^2| \cos 0 = |v^2| \geq 0$$

Con le componenti cartesiane: $(u, v) = x1x2 + y1y2 + z1z2$

- **Norma:** La norma o lunghezza in uno spazio vettoriale metrico è la funzione che associa al vettore v∊V il numero reale non negativo

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

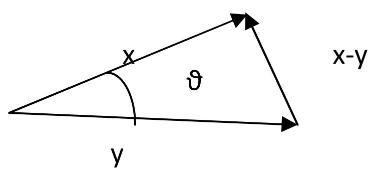
- **Distanza:** è la funzione che associa ai vettori v,w ∊ V il numero reale

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

- **Proprietà della norma e della distanza:**
  1. $\|av\| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{a^2(v, v)} = |a|\|v\|$
  2. Per la simmetria/bi linearità del prodotto scalare:

$$\|v + w\|^2 = (v + w, v + w) = \|v\|^2 + 2(v, w) + \|w\|^2 \; e$$
$$\|v - w\| = \|v\|^2 - 2(v, w) + \|w\|^2$$
$$da \; cui \rightarrow \; 4(v, w) = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$$

- **Ortogonalità:** I vettori v e w di V si dicono ortogonali se (v,w)=0, cioè se vale il teorema di Pitagora $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$
  Se w è un vettore non nullo di V, possiamo scomporre ogni vettore v∈V nella somma:
  $$v = cw + (v - cw)$$
  $in \; modo \; che \; v - cw \; sia \; ortogonale \; a \; w, cio$è $(v - cw, w) = (v, w) - c\|w\|^2 = 0 \; da \; cui \; c = \frac{(v, w)}{\|w\|^2}$
- **Proiezione ortogonale:** Il vettore
  $pr_w(v) = \frac{(v,w)}{\|w\|^2} w$ è $la \; proiezione \; ortogonale \; del \; vettore \; v \; su \; w$
- **Teorema (disuguaglianza di Cauchy- Schwarz):** Per ogni coppia di vettori v e w, si ha: $|(v, w)| \leq \|w\|\|v\|$. Vale l'uguaglianza se e solo se w e v sono linearmente dipendenti
- **Corollario: disuguaglianza triangolare :** per ogni coppia di vettori v e w vale: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- **Angolo:** l'angolo convesso tra due vettori non nulli v e w di uno spazio vettoriale metrico è il numero reale ϑ, compreso tra 0 e π, tale che:
  $$\cos\theta = (v, w)/\|w\|\|v\| \;\; con - 1 \leq \cos\theta \leq 1$$
- **Insieme ortonormale:** Un insieme di vettori {e1,…,e_m} di V è un insieme ortonormale se (e_i, e_j)=0 se i≠j e (e_i,e_i)=1 per i=1,…,m
- Un insieme ortonormale è linearmente indipendente
- **Base ortonormale:** Un insieme ortonormale di generatori di un sottospazio U di V, è detto base ortonormale di U
- **Teorema di Gram – Schmidt:** Se {v_1,…,v_n} è un insieme linearmente indipendente, esiste un insieme ortonormale {e_1,…,e_m} tale che:
  $$\langle e_{1,\dots,} e_k \rangle = \langle v_{1,\dots,} v_k \rangle \; per \; ogni \; k = 1, \dots, m$$
  In particolare a partire da una base di V si può costruire una base ortonormale di V.
- Si chiama modulo o lunghezza del vettore $\vec{x} = (x1, x2, x3), usando \; il \; simbolo \; \|\vec{x}\|, il \; numero$:
  $$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
  $$Allora, dati \; i \; due \; vettori \; \vec{x} = (x1, x2, x3), \vec{y} = (y1, y2, y3) si \; ha$$
  $$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (x1 - y1)^2 + (x2 - y2)^2 + (x3 - y3)^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(x1y1 + x2y2 + x3y3)$$
  Ma
  $\vec{x} - \vec{y} corrisponde \; al \; terzo \; lato \; di \; un \; triangolo, quindi \; per \; la \; regola \; del \; coseno \; il \; suo \; quadrato$ è:
  $$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta \;\; con \; \theta \; angolo \; tra \; \vec{x} \; e \; \vec{y}$$
  Il prodotto scalare tra i vettori $\vec{x} = (x1, x2, x3) e \; \vec{y} = (y1, y2, y3)$è $uguale \; a$:
  $$\vec{x} \cdot \vec{y} = x1y1 + x2y2 + x3y3 = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos\theta$$



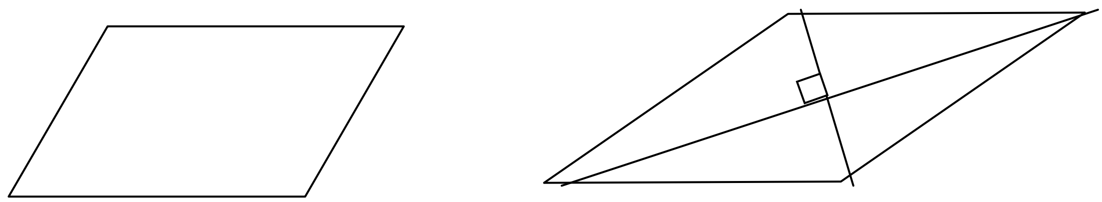
- Proprietà del prodotto scalare:
  1. xy=yx commutativa
  2. $(\lambda x+\mu y)z=\lambda(xz)+\mu(yz)$
  3. $z(\lambda x+\mu y)=\lambda(zx)+\mu(zy)$
- **Prodotto vettoriale:**

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix}x2 & x3\\ y2 & y3\end{vmatrix}i+\begin{vmatrix}x3 & x1\\ y3 & y1\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}x1 & x2\\ y1 & y2\end{vmatrix}k=\det\begin{bmatrix}i & j & k\\ x1 & x2 & x3\\ y1 & y2 & y3\end{bmatrix}$$

- Proprietà del prodotto vettoriale:
  1. $(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\times\vec{z}=\lambda(\vec{x}\times\vec{z})+\mu(\vec{y}\times\vec{z}) con\ \mu,\lambda\in R$
  2. $\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}$
  3. $\vec{x}\times\vec{y}=0\ se\ i\ vettori\ x\ e\ y\ sono\ paralleli\ e\ \vec{x}\times\vec{x}=0$
  4. Identità cicliche: $\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k},\vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath},\vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}$
  5. Non è associativo
- **Prodotto misto:** $R^3\times R^3\times R^3\to R$

$$x(y\times z)=x\cdot y\times z=\begin{vmatrix}x1 & x2 & x3\\ y1 & y2 & y3\\ z1 & z2 & z3\end{vmatrix}=y\cdot z\times x=z\cdot x\times y$$
$$x\cdot y\times z=-y\cdot x\times z=x\times y\cdot z$$

- **Teorema:** Un parallelogrammo è un rombo se e solo se le diagonali sono ortogonali



- **Disuguaglianza di Mikowsky:** $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$
- **Disuguaglianza triangolare:** $\|x-z\|\leq\|x-y\|+\|y-z\|$
- Determinate applicazioni dei prodotti: esempio equazione cartesiana nel piano e di un piano nello spazio