Geometria ed algebra lineare

(Da completare)

Elemento neutro dell'insieme G rispetto all'operazione *:

u è elemento neutro di G se $x * u = u * x = x$ $\qquad u \in G \, \forall x \in G$

Es: *0 è elemento neutro di R rispetto all'addizione* ⇔ *x + 0 = 0 + x = x*

Elemento simmetrico dell'insieme G rispetto all'operazione *:

y è elemento simmetrico di G se $\mathbf{x * y = y * x = u}$ $\qquad y \in G, \forall x \in G$

Es: *-3 è elemento simmetrico di 3 in R e rispetto all'addizione* ⇔ *3 – 3 = -3 + 3 = 0*

Gruppo:

(G, *) è gruppo di G rispetto all'operazione * se * è un'operazione associativa, ammette un elemento neutro e ciascun elemento di G ha un simmetrico.

Se l'operazione * gode della proprietà commutativa, il gruppo di dice **commutativo**.

Es: *(R, +) è gruppo commutativo di R rispetto all'addizione.*

Campo:

K è un campo se esistono i gruppi commutativi (K, +) e (K, ·) e se K gode della proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma (*a(b+c) = ab + ac* $a, b, c \in K$)

Spazio vettoriale:

V è spazio vettoriale su un campo K (indicato con V(K))se esiste un gruppo commutativo (V, +) e se esiste una funzione "prodotto esterno" f: K x V → V per cui valgono le seguenti proprietà:

- Distributiva del prodotto rispetto alla somma $\qquad k(v_1+v_2) = kv_1 + kv_2$
- Distributiva del prodotto rispetto alla somma di scalari $\qquad (k_1+k_2)v = k_1v + k_2v$
- Associativa del prodotto esterno $\qquad (k_1k_2)v = k_1(k_2v)$
- Identità rispetto al prodotto esterno $\qquad 1 \cdot v = v$

($v \in V, k \in K$)

Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano **vettori**.

Insieme chiuso:

Un insieme G si dice chiuso rispetto ad un'operazione *, se il risultato di tale operazione rispetto a due qualsiasi elementi di G appartiene ancora a G.

Es: *L'insieme R è chiuso rispetto all'addizione perchè sommando due qualsiasi elementi di R si ottiene un risultato appartenente ancora ad R.*

Es: L'insieme N non è chiuso rispetto alla divisione perchè dividendo due numeri interi non multipli si ottiene un risultato in R ma non in N.

Sottospazio vettoriale:

W(K) è sottospazio vettoriale di V(K), se $W \subseteq V$, $V \neq \emptyset$ e W èchiuso rispetto alla somma ed al prodotto esterno.

***Es:** Un piano è sottospazio vettoriale dello spazio tridimensionale perchè, sommando tra loro due o più vettori appartenenti al piano o moltiplicando un vettore per uno scalare, il risultato è un vettore contenuto ancora nel piano.*

Combinazione lineare:

v è combinazione lineare dei vettori v_i mediante i coefficienti a_i se $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i v_i}$ con $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_i} \in \boldsymbol{V(K)}, \boldsymbol{a_i} \in \boldsymbol{K}.$

***Es:** Il vettore [1,2] è combinazione lineare dei vettori [1,0] e [0,1] mediante i coefficienti 1 e 2.*

Dipendenza lineare:

I vettori v_1, …, v_k sono **linearmente dipendenti** se esiste almeno un vettore di essi che è combinazione lineare degli altri.

Es: I vettori [1,2], [2,4],[3,1] sono linearmente dipendenti perchè il vettore [2,4] è combinazione lineare di [1,2], [3,1] mediante i coefficienti 2 e 0.

Es: I vettori [1,0], [0,1] sono linearmente indipendenti.

Sottospazio generato da un'insieme di vettori:

Sia S un insieme contenente alcuni vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale V(K); si dice sottospazio generato da S e si indica con W, l'insieme di tutti i vettori ottenuti mediante combinazione lineare dei vettori appartenenti ad S.

W = <S>

S prende il nome di **insieme generatore** di W.

Se S è un insieme finito, W si dice **sottospazio finitamente generato**.

Base di uno spazio finitamente generato:

Se W è uno spazio finitamente generato dall'insieme S e gli elementi di S sono tutti linearmente indipendenti allora S costituisce una **base** di W.

Se gli elementi di S sono ortogonali tra loro (il prodotto scalare tra due qualsiasi elementi è 0) allora la base si dice **ortogonale**.

Se S è una base ortogonale in cui tutti gli elementi hanno modulo pari a 1 allora la base si dice **ortonormale.**

- Ogni spazio ha sempre una base.
- Una base qualunque di uno spazio K^ncontiene n vettori
- In uno spazio vettoriale V(K) finitamente generato tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori
- La **dimensione di uno spazio** è il numero di vettori appartenenti ad una qualunque base.
- Presi m vettori di uno spazio vettoriale V di dimensione n, se m > n allora i vettori sono sicuramente linearmente dipendenti.

Formula di Grassmann

La somma delle dimensioni di due sottospazi vettoriali U e W è pari alla somma della dimensione dello spazio somma U + W e della dimensione dello spazio intersezione U ∩W.

$U, W \subseteq V(K) \Rightarrow \dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$

Base canonica:

Una base C{$e_1, e_2, ..., e_n$} è detta **canonica** se $e_i(j) = \delta_{ij}$

NB: δ_{ij} è detto **delta di Kronecker** e vale 1 se i = j, 0 altrimenti.

Es: *la base C((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) è la base canonica di R^3.*

Somma ed intersezione di spazi:

Siano U e W due sottospazi di V(K):

- L'insieme intersezione dei due sottospazi è ancora contanuto in V(K) **$U \cap W \subseteq V(K)$**
- L'insieme somma dei due sottospazi è definito come $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \{ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\}$

Se U ∩ W = {0} la somma U + W si dice **somma diretta**.

Sistemi lineari:

Un S.L. di *n* equazioni in *N* incognite può essere rappresentato mediante l'equazione

Ax = b *Dove A è una matrice quadrata di ordine N e b e x sono vettori colonna con N elementi.*

Il vettore x rappresenta le *N* incognite, mentre il vettore b rappresenta i termini noti del sistema.

La matrice A viene detta **matrice associata** .

Se il sistema è nella forma ***Ax = 0*** allora quest'ultimo si dice **omogeneo**.

Se det(A) = 0 allora il sistema ammette soluzione.

Matrice completa:

La matrice completa (A|b) di un sistema lineare Ax = b si ottiene aumentando di 1 il numero di colonne di A e ponendo la colonna aggiunta pari a b.

Sistemi lineari equivalenti:

Se due sistemi ammettono le medesime soluzioni, essi si dicono **equivalenti.**

E' possibile trasformare un sistema in uno equivalente ricorrendo a tre tipi di trasformazione della matrice completa (A|b):

- Scambio di due righe
- Moltiplicazione di una riga per uno scalare diverso da 0
- Somma o differenza di due righe e sostituzione del risultato ad una delle due

Rango di una matrice:

Il rango di una matrice è il numero massimo di righe linearmente indipendenti presenti in essa.

Teorema di Rouchè – Capelli

Un sistema lineare di equazioni ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice A è pari al rango della matrice completa (A|b). In tal caso le soluzioni del sistema saranno $\infty^{n-r(A)}$, dove n è il numero di incognite ed r(A) è il rango della matrice A.

Teorema di Cramer

Dato un sistema lineare nella forma $Ax = b$, esso ammette un'unica soluzione se e solo se $Det(A) \neq 0$.

In tal caso le componenti della soluzione ($x_1, \dots, x_n$) assumono la seguente forma:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Dove A_i è la matrice ottenuta sostituendo l'i-esima colonna con il vettore colonna b.

Funzione lineare, isomorfismo, endomorfismo:

Siano V(K) e V'(K) spazi vettoriali su K e *f: V → V'*

Una funzione si dice **lineare** se valgono le seguenti proprietà:

- ***f(v+w) = f(v) + f(w)*** $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \epsilon \boldsymbol{V}$ *(proprietà additiva)*
- ***f(av) = a · f(v)*** $\forall \boldsymbol{v} \epsilon \boldsymbol{V}, \forall \boldsymbol{a} \epsilon \boldsymbol{K}$ *(omogeneità)*

f è detta **isomorfismo** se essa è biettiva (ad ogni elemento di V' corrisponde uno ed un solo elemento di V).

Se la matrice associata alla funzione *f* è invertibile allora *f* è biettiva.

f è detta **endomorfismo** se V = V'.

NB: Per una funzione lineare f vale sempre l'uguaglianza f(0) = 0.

Funzione iniettiva, suriettiva, biettiva:

Data una funzione *f* alla quale è associata una matrice A (*n* x *m)*:

- Se il rango di A è pari ad *m* allora *f* è **iniettiva**
- Se il rango di A è pari ad *n* allora *f* è **suriettiva**
- Se il rango di A è pari ad *n* ed *m* (il che può accadere solo se la matrice è quadrata) *f* è **biettiva**

Nucleo di una funzione lineare:

L'insieme N(f) (o Ker(f)) è detto **nucleo** della funzione f: V(K) -> V'(K) se:

N(f) = Ker(f) = $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V(K)} | \boldsymbol{f(v)} = \boldsymbol{0}\}$

NB: Una funzione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è {0}.

Immagine di una funzione linare:

La dimensione dell'immagine di una funzione lineare è pari al numero di colonne linearmente indipendenti presenti nella sua matrice associata.

Teorema della nullità più rango:

Sia T: $V^n(K) \rightarrow V^m(K)$ allora si ha che:

$\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = n$

Teorema delle funzioni composte:

Siano T_1 e T_2 due funzioni lineari, allora la funzione composta T_1 ⍰ T_2 è lineare.

Cambiamento di base

Sia T: $V^n(K) \rightarrow V^m(K)$, B:$\{b_1, ..., b_n\}$ una base di V^n e C:$\{c_1, ..., c_m\}$ una base di V^m, è possibile costruire una matrice associata A: $[a_{nm}]$ relativa ad una funzione T' in grado di trasformare un qualsiasi valore espresso mediante la base B usando la funzione T ed esprimere il risultato attraverso la base C.

La matrice A si ricava mediante le seguenti n relazioni:

$$T(b_1) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \cdot c_i$$

...

$$T(b_n) = \sum_{i=1}^{m} a_{in} \cdot c_i$$

La funzione T' sarà pari al prodotto della matrice A per il generico vettore colonna $[x_1, ..., x_m]$.

Es:

T: $V^2(R) \rightarrow V^3(R)$ con$T(x1, x2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$

B: ((1,0), (0,1))

C: ((-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1))

Usando le relazioni di cui sopra

T(1,0) = (1,0,1) = a_{11} · (-1,0,0) + a_{21} · (0,-1,0) + a_{31} · (0,0,1)

T(0,1) = (0,1,1) = a_{12} · (-1,0,0) + a_{22} · (0,-1,0) + a_{32} · (0,0,1) *si ottengono 6 equazioni in 6 incognite*

a11 · (-1) + a21 · (0) + a31 · (0) = 1

a11 · (0) + a21 · (1) + a31 · (0) = 0

a11 · (0) + a21 · (0) + a31 · (1) = 1

a12 · (-1) + a22 · (0) + a32 · (0) = 0

a12 · (0) + a22 · (-1) + a32 · (0) = 1

a12 · (0) + a22 · (0) + a32 · (-1) = 1

Risolvendo il (volutamente banale) sistema si ottiene la matrice $A=M_B^{\,C}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. *Moltiplicando quest'ultima per il generico vettore colonna si ottiene la funzione T':*

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ ➔ $T'(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2, -x_1 - x_2)$

Matrice di transizione

Siano B: $\{b_1, \ldots, b_n\}$ e C: $\{c_1, \ldots, c_n\}$ due basi di $V^n(K)$, si dice matrice di transizione da B a C la matrice invertibile di ordine n P: $[p_{nn}]$, ricavata mediante le seguenti relazioni:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot p_{i1}$$

...

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot p_{in}$$

In generale la matrice di transizione da B a C si ottiene moltiplicando le matrici M_B^{-1} e M_C, dove M_C è la matrice avente come colonne i vettori della base C e M_B^{-1} è l'inverso della matrice avente per colonne i vettori della base B.

Dato un vettore qualsiasi espresso rispetto alla base B, è possibile esprimere il medesimo vettore moltiplicando lo stesso per la matrice di transizione da B a C.

Matrici simili

Una matrice A è simile ad una matrice B se esiste una matrice P invertibile tale che $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$.

Matrici simili hanno lo stesso determinante.

Matrice ortogonale

Una matrice si dice ortogonale se la sua matrice trasposta coincide con la sua matrice inversa.

Autovalore

Sia λ uno scalare appartenente a K e T un endomorfismo su V(K); λ si dice **autovalore** se esiste un vettore v (detto **autovettore**) appartenente a V(K) tale che valga la relazione:

$T(v) = \lambda v$

L'insieme di tutti gli autovalori di T è chiamato **spettro** di T.

Un endomorfismo T di uno spazio $V^n(K)$ ha una matrice associata diagonale se e solo se $V^n(K)$ ha una base costituita da autovettori di T, in tal caso T si dice **diagonalizzabile**. Se la matrice associata è simile ad una matrice diagonale allora T si dice **diagonalizzabile per similitudine**.

Autospazio

Sia λ autovalore di t: V → V', si definisce **autospazio** di t relativo a λ:

$E(\lambda) = \{v \in V^n(K) | \ t(v) = \lambda v\}$

NB: $Ker(T - \lambda I)$ è autospazio se e solo se non contiene vettori nulli e cioè se e solo se $T-\lambda I$ non è iniettiva.

NB: Se $v_1, ..., v_n$ sono autovettori corrispondenti agli autovalori distinti$\lambda_1, ..., \lambda_n$ allora gli autovettori sono linearmente indipendenti.

NB: Se V ha dimensione finita, allora t ha al massimo n autovalori. Se il numero degli autovalori è esattamente n allora gli autovalori formano una base e T è diagonalizzabile.

Per diagonalizzare t è sufficiente risolvere il prodotto $\mathbf{P\,A\,P^{-1}}$dove P è la matrice di cambiamento di base in cui l'i-esima colonna è pari all'autovettore relativo all'i-esimo autovalore (autovettori relativi ad autovalori tra loro distinti sono ortogonali, il che implica che $P^{-1} = P^T$) e A è la matrice associata a t.

Da quanto scritto sopra si ricavano tre condizioni equivalenti:

- $\lambda \in K$ è autovalore di T
- $\exists\, x \neq 0\ in\ K^n tale\ che\ Ax = \lambda x$
- $\det(A - \lambda I) = 0$

Polinomio caratteristico

Il polinomio caratteristico è definito come$\mathbf{P_T(\lambda) = det(A - \lambda I)}$.

La **molteplicità geometrica** ($Mg(\lambda_0)$)di λ_0 è la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0.

La **molteplicità algebrica** ($Ma(\lambda_0)$) di λ_0è il grado della radice di λ_0 presente nel polinomio caratteristico.

La seguente disuguaglianza è sempre vera $\mathbf{Mg}(\boldsymbol{\lambda_0}) \leq \mathbf{Ma}(\boldsymbol{\lambda_0})$

NB: La seguente uguaglianza è sempre vera $\mathbf{P_T(0) = det(A)}$

NB: $P_t(\lambda) = 0$ se e solo se λ p autovalore di T.

NB: Siano $\lambda_1, ..., \lambda_h$ autovalori distinti di T, T è diagonalizzabile se e solo se $\sum_{i=1}^{h} \dim\big(E(\lambda)\big) = \dim(T)$.

Retta

Le equazioni di una retta sono:

- $ax+by+c=0$ Equazione cartesiana
- $\begin{cases} x=X_0+t \\ y=Y_0-\frac{a}{b}t \end{cases}$ Equazione parametrica di una retta passante per $P(X_0; Y_0)$

Distanza punto retta

La distanza di un punto $P(X_0; Y_0)$ dalla retta *r:* $ax + by + c = 0$è pari a:

$$\text{dist}(P,r)= \frac{|aX_0+bY_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Angolo di incidenza tra due rette

Date due rette *r:* $y = mx + q$e *t:* $y = m'x + q'$ l'angolo d'incidenza ▯ è dato da:

$$\tan(\vartheta) = \left|\frac{m' - m}{1+m'm}\right|$$

Parallelismo e perpendicolarità:

Date due rette *r:* $y = mx + q$e *t:* $y = m'x + q'$

- *r* è parallela a *t* se e solo se $m=m'$
- *r* è parallela a *t* se e solo se $m= -\frac{1}{m'}$

Equazione del fascio di rette:

Date due rette *r:* $ax + by + c = 0$ e *t:* $a'x + b'y + c = 0$, il fascio di rette generato da esse è dato da:

f: $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c) = 0$

Dove λ e μ sono due numeri appartenenti ad R. Per semplicità il parametro λ viene posto sempre pari a 1.

Circonferenza:

L'equazione di una circonferenza di centro C(α; β) e di raggio *r* è data dalle seguentiequazioni:

- $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ Equazione cartesiana
- $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2=0$ Equazione cartesiana canonica
- $\begin{cases} x= \alpha +r\cdot\cos(t) \\ y= \beta+r\cdot\sin(t) \end{cases}$ Equazione parametrica

Equazione del fascio di circonferenze:

Date due circonferenze *c:* $x^2 + y^2 + ax + by+ c = 0$ e *p:* $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c = 0,$ il fascio di circonferenze generato da essere è dato da:

f: $\lambda(x^2 + y^2 + ax + by+ c) + \mu(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c) = 0$

Dove λ e μ sono due numeri appartenenti ad R. Per semplicità il parametro λ viene posto sempre pari a 1.

Proprietà del fascio di circonferenze:

In base alla posizione delle due circonferenze generanti un fascio si ottengono diverse proprietà di quest'ultimo:

- Se le due circonferenze si intersecano in due punti tutte le circonferenze del fascio passano per quei punti.
- Se le due circonferenze sono tangenti (si intersecano cioè in un unico punto) allora tutte le circonferenze del fascio passano per quel punto.
- Se le due circonferenze non si intersecano allora non ci sono punti comuni a tutto il fascio.

Coniche

Una conica è un qualsiasi luogo geometrico di punti ottenuto intersecando un cono infinito mediante un piano.

Rappresentazione matriciale di una conica:

Una qualsiasi conica scritta nella forma cartesiana *ax2 + by2 + cxy + dx + ey + f = 0*può essere rappresentata mediante una matrice 3x3 del tipo:

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & c/2 & d/2 \\ c/2 & b & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$ (Matrice completa)

$A = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$ (Matrice incompleta)

Invarianti metrici di una conica:

- L' **invariante cubico I_3**della conica è il determinante della matrice $\tilde{A}$.
- L'**invariante quadratico I_2**della conica è il determinante della matrice A.
- L'**invariante lineare I_1**della conica è la traccia della matrice A (dove per traccia si intende la somma degli elementi posti sulla diagonale principale).

Classificazione di una conica:

E' possibile classificare una conica in base ai valori assunti dai suoi invarianti metrici, in particolare:

- $I_3 \neq 0$ ➔**conica non degenere**
  - $I_2 > 0$ ➔**ellisse**
    - $I_1 \cdot I_3 < 0$ ➔**ellisse reale**
    - $I_1 \cdot I_3 > 0$ ➔**ellisse immaginaria**
  - $I_2 = 0$ ➔**parabola**
  - $I_2 < 0$ ➔**iperbole**
    - $I_1 = 0$ ➔**iperbole equilatera**
    - $I_1 \neq 0$ ➔**iperbole non equilatera**
- $I_3 = 0$ ➔**conica degenere**
  - $I_2 < 0$ ➔**due rette reali distinte**
  - $I_2 = 0$ ➔**coppia di rette**
    - Rango($\tilde{A}$) = 2 ➔**rette reali distinte o rette complesse coniugate senza punti in comune**
    - Rango($\tilde{A}$) = 1 ➔**rette reali coincidenti**
  - $I_2 > 0$ ➔**due rette immaginarie coniugate**

Forme canoniche di una conica:

(Vedi "Forme canoniche di una quadrica", il procedimento è simile ma la coordinata z non esiste) (Rivedere...)

Tangenti di una conica:

Sia data una conica di equazione $C: X^T \tilde{A}\, X = 0$, la retta tangente in un punto X_0 è data dall'equazione:

$$\mathrm{r}: \left(X_0^T \tilde{A} X\right)^2 \text{-} \left(X_0^T \tilde{A} X_o\right)\left(X^T \tilde{A} X\right) = 0.$$

Qualora il punto appartenesse alla conica allora il procedimento per individuare la retta tangente è sensibilmente più semplice:

1° metodo:

$\mathrm{r}: f_x^0(x_0\text{-}x) + f_y^0(y_0\text{-}y) = 0$ dove f_x^0 è la derivata parziale di C rispetto ad x calcolata nel punto x_0.

2° metodo:

$\mathrm{r}: \left(x_0^T A X\right) = [x_0, y_0, u] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}$ dove u è la coordinata omogenea e di solito vale 1.

Fasci di coniche:

I fasci di coniche possono essere generati da 4 punti (o da 4 rette che si intersecano in 4 punti, non necessariamente diversi) che convenzionalmente chiameremo A, B, C, D.

Si individuano le rette passanti per AB, CD, AC e CB nella forma AB: f(x,y) = 0, CD: g(x,y) = 0, AC: h(x,y) = 0, CB: i(x,y) = 0.

Il fascio di coniche generato dai quattro punti è dato da F: k(f(x,y)g(x,y)) + h(x,y)i(x,y) = 0.

L'equazione ottenuta sarà in funzione di K questo perchè non è detto che ad un fascio di coniche appartengano coniche di una stessa tipologia. Per la motivazione qui sopra allora sarà necessario studiare la matrice completa in funzione di K e discutere la stessa in base ai valori assunti da quest'ultimo.

Quadriche e rappresentazione matriciale:

Le quadriche rappresentano alcuni solidi nello spazio euclideo. Nella forma cartesiana geneale esse assumono la forma $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$ e, come per le coniche, possono essere espresse mediante una matrice 4x4:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 & g/2 \\ d/2 & b & f/2 & h/2 \\ e/2 & f/2 & c & i/2 \\ g/2 & h/2 & i/2 & j \end{bmatrix}$$ (Matrice completa)

$$A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}$$ (Matrice incompleta)

Forme canoniche di una quadrica:

Una quadrica si dice in forma canonica (rispetto ad un opportuno sistema di riferimento) se può essere scritta nella forma q: $ax^2 + by^2 + cz^2 = d$.

Per portare una qualsiasi quadrica in forma canonica è necessario apportare delle trasformazioni di *rototraslazione* seguendo i seguenti passaggi:

1. Si individuano gli autovalori della matrice **A** (imponendo **A** – λ_i = 0)
2. Si individuano gli autovettori relativi agli autovalori (imponendo $(A - \lambda_i) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$)
3. Si normalizzano gli autovalori trovati dividendo ciascuno di essi per il proprio modulo.
4. Si determina la base ortonormale mediante la matrice P, dove ogni colonna è pari al i-esimo autovettore normalizzato
5. Si individuano i valori di *x*, *y* e *z* in funzione di *x'*, *y'* e *z'* mediante il seguente sistema: $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = P \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$.
6. Si sostituiscono i valori di *x(x'), y(y'), z(z')*nell'equazione della quadrica ottenendo un'equazione in *x', y'* e *z'*.
7. Si raccolgono tutti i termini contenenti rispettivamente x', y' ed z' tra loro e si procede col completamento dei quadrati
8. Si sostituiscono ai binomi $(x + \alpha)^2$, $(y + \beta)^2$ e $(z + \gamma)^2$ le nuove coordinate x'', y'' e z''. La somma degli altri termini costituisce il termine noto, pertanto la quadrica avrà un'equazione del tipo: $kx''^2 + ly''^2 + mz''^2 + n = 0$.

NB: Se non vi sono termini misti (in xy, yz, o zx) la quadrica è solamente traslata rispetto agli assi coordinati (ma non ruotata) ed è pertanto possibile saltare tutti i passaggi ed iniziare dal numero 7 (effettuando comunque sia i passaggi dall'1 al 6 si ottiene che P è pari alla matrice identità).

Classificazione di una quadrica:

Per classificare una conica è sufficiente utilizzatre la tabella qui sotto, ricordando che seg(X) è la segnatura della matrice X nella forma (p,n) dove *p* è il numero di autovalori positivi ed *n* il numero di quelli negativi (Il che significa che non è indispensabile portare in forma canonica una quadrica per determinare la sua tipologia!).

Rango(Ã)	Rango(A)	Det(Ã)	seg(A)	seg (Ã)	Quadrica	Equazione
r(Ã)=4	r(A)=3	Det(Ã)<0	*(3,0) o (0,3)*		***Ellissoide reale***	$x^2+y^2+z^2-1=0$
			(2,1) o (1,2)		***Iperboloide a 2 falde***	$x^2-y^2-z^2-1=0$
		Det(Ã)>0	*(3,0) o (0,3)*		***Ellissoide immaginario***	$x^2+y^2+z^2+1=0$
			(2,1) o (1,2)		***Iperboloide ad 1 falda***	$x^2+y^2-z^2-1=0$
	r(A)=2	Det(Ã)<0			***Paraboloide ellittico***	$x^2+y^2-z=0$
		Det(Ã)>0			***Paraboloide iperbolico***	$x^2+y^2+z=0$
r(Ã)=3	r(A)=3		*(3,0) o (0,3)*		***Cono immaginario***	$x^2+y^2+z^2=0$
			(2,1) o (1,2)		***Cono reale***	$x^2+y^2-z^2=0$
	r(A)=2		*(2,0) o (0,2)*	*(3,0) o (0,3)*	***Cilindro immaginario***	$x^2+y^2+1=0$
				(2,1) o (1,2)	***Cilindro reale***	$x^2+y^2-1=0$
			(1,1)		***Cilindro iperbolico***	$x^2-y^2-1=0$
	r(A)=1				***Cilindro parabolico***	$x^2-y=0$
r(Ã)=2	r(A)=2		*(2,0) o (0,2)*		***Piani complessi incidenti***	$x^2+y^2=0$
			(1,1)		***Piani reali incidenti***	$x^2-y^2=0$
	r(A)=1			*(2,0) o (0,2)*	***Piani complessi paralleli***	$x^2+1=0$
				(1,1)	***Piani reali paralleli***	$x^2-1=0$
r(Ã)=1					***Piani coincidenti***	$x^2=0$

(I termini a, b, c e d sono positivi)

Tangenti di una quadrica:

Il metodo per trovare le tangenti di una quadrica è identico a quelli illustrati per coniche, considerando che vi è un'altra dimensione da derivare (primo metodo) o inserire nei vettori X_0 ed X (secondo metodo).

NB: Le tangenti di una quadrica sono dei piani!

Quadriche di rotazione (Caso generico)

Sia data una retta *r* definita come "asse" ed una curva generica γ nello spazio. La quadrica ottenuta ruotando la curva γ rispetto ad r è definita *quadrica di rotazione*.

NB: Una quadrica è di rotazione se e solo se intersecando la suddetta con dei piani paralleli ad una certa direzione (quella definita dall'asse) si ottengono <u>sempre e solo</u> circonferenze, il che equivale al fatto di avere due autovalori uguali.

La strategia per individuare questo tipo di quadriche consiste nell'immaginare di "affettare" l'asse r mediante un piano perpendicolare allo stesso. Il piano α ottenuto intersecherà sicuramente anche la curva in un punto G e l'asse in un punto R. A questo punto si individua la sfera di centro R e di raggio RG e si interseca la suddetta con il piano α: la circonferenza ottenuta sarà proprio una "fetta" di spessore infinitesimo della quadrica di rotazione. Visto che i punti R e G, il piano α e la circonferenza sono tutti in funzione di un parametro, è sufficiente eliminare quest'ultimo per trovare l'equazione della superficie.

Il metodo analitico è il seguente:

1. Sia data la retta nella forma parametrica $r: \begin{cases} x = x_0 + kt \\ y = y_0 + lt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$
2. Sia data una curva nella forma parametrica $\gamma: \begin{cases} x=x(u) \\ y=y(u) \\ z=z(u) \end{cases}$
3. Si determina il fascio improprio di piani perpendicolari ad r $\propto$: $kx+ly+mz+d=0$
4. Si trova d in funzione di t sostituendo nell'equazione del fascio i termini x,y e z con i termini x(t), y(t) e z(t) relativi alla retta r.
5. Si individua il generico piano α(t) del fascio improprio dipendente da d(t)
6. Si interseca la curva γ(u) con α(t) al fine di individuare u(t)
7. Si individuano i punti di intersezione G(t) tra α(t) e la curva γ(u)
8. Si individuano tutti i punti P(x,y,z) tali che $\mathrm{dist}\big(P, r(t)\big)=\mathrm{dist}(r(t), G(t))$ (quella ottenuta è una sfera di centro r(t) e di raggio dist(r(t), G(t)))
9. Si pone a sistema la sfera individuata con il piano α(t)

Es:

Dati: $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ $\gamma: \begin{cases} x=2-u \\ y=3+u \\ z=1+2u \end{cases}$

Fascio improprio di piani: $\propto$: x-2y+3z+d=0

Individuo d(t): $(1 + t) - 2(2 + t)$ +3(-1+3t) + d = 0 ➔ d(t) = 6 – 14t

Individuo α(t): $\propto$: x-2y+3z+6-14t=0

Trovo u(t): (2-u) -2(3+u) + 3(1+2u) + 6 -14t = 0 ➔$u(t)= \frac{5-14t}{3}$

Trovo G(t): $G: \begin{cases} x=2-\frac{5-14t}{3} \\ y=3+\frac{5-14t}{3} \\ z=1+\frac{10-28t}{3} \end{cases}$

Trovo la sfera: $s(t): (x-1-t)^2 + (y-2 + 2t)^2 + (z + 1-3t)^2 = \left(1 + t- 2 + \frac{5-14t}{3}\right)^2 + \left(2 - 2t - 3 - \frac{5-14t}{3}\right)^2 + \left(-1 + 3t - 1 - \frac{10-28t}{3}\right)^2$

Interseco la sfera con α(t): $\begin{cases} s(t) \\ x-2y+3z+6-14t \end{cases} = \begin{cases} s(t) \\ t=\frac{x-2y+3z+6}{14} \end{cases}$

Caso in cui l'asse di rotazione è un asse coordinato

In questo caso il modus operandi è decisamente più facile.

Nell'esempio seguente l'asse di rotazione sarà l'asse x, mentre la curva sarà γ: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.

Immaginiamo di intersecare l'asse la quadrica di rotazione con un piano parallelo al piano YZ. Il generico punto della circonferenza individuata dal piano potra essere scritto in coordinate polari, ovvero:

$$\gamma: \begin{cases} x=x(t) \\ y=(\sqrt{y(t)^2+z(t)^2})\cos\vartheta \\ z=(\sqrt{y(t)^2+z(t)^2})\sin\vartheta \end{cases}$$

Sommando i quadrati delle coordinate y(t) e z(t) si ottiene un sistema nella forma:

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y^2 + z^2 = (y(t)^2 + z(t)^2)(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) \end{cases}$$

Nella seconda equazione il prodotto$(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)$ è pari ad 1 quindi il sistema può essere riscritto come

$$\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y^2 + z^2 = y(t)^2 + z(t)^2 \end{cases}$$

Il sistema così individuato è immediatamente risolvibile e permette di trovare la quadrica di rotazione.

Caso in cui l'asse di rotazione è un asse coordinato e la curva giace su un piano

Nell'esempio seguente l'asse sarà l'asse Y e la curva giacerà sul piano YZ (La curva non può giacere sul piano XZ perchè una rotazione simile produrrebbe un piano).

La strategia per risolvere questo genere di problemi è piuttosto semplice:

Siaγ=$\begin{cases} x=0 \\ f(y,z)=0 \end{cases}$, ne consegue che la curva gamma è in funzione di y e di z, ovvero γ = γ(y,z), dove z è la variabile indipendente ed y quella dipendente.

Possiamo imporre che la funzione y = f(z) debba essereverificata per tutti i punti appartenenti ad un generico piano parallelo ad XZ e la cui distanza dall'asse di rotazione sia proprio pari a z (ovvero una circonferenza di raggio z centrata in C:(0,y,0)). Mediante un semplice teorema di pitagora possiamo imporre z' = $\sqrt{z^2 + x^2}$ e sostituire tale valore ottenendo la quadrica di rotazione di equazione $f(y, \sqrt{z^2 + x^2})$.

Estrazione di una base:

Si vuole trovare una base di uno spazio generato del quale si conoscono alcuni dei suoi generatori, ovvero:

Sia dato un gruppo di n vettori i quali generano uno spazio S, la metodologia che consente di estrarre tra questi una base è il seguente:

- Se il primo vettore è nullo si elimina, altrimenti si tiene e si parte da quello successivo
- Per ogni vettore successivo al primo si controlla se questi è combinazione lineare dei precedenti: se lo è si elimina, altrimenti si tiene
- Una volta controllato l'ultimo vettore, quelli rimanenti costituiscono una base di S.

Completamento di una base:

Si hanno n vettori indipendenti tra loro e si vuole completare una base di un altro spazio vettoriale:

- Si aggiungono ai vettori dati anche tutti i vettori costituenti una qualsiasi base dello spazio vettoriale di cui si vuole completare la base (solitamente si usa la base canonica).
- Si applica l'algoritmo di estrazione della base visto precedentemente.

Es: *Siano dati i vettori linearmente indipendenti* $\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ *e li si vuole completare ad una base di R^4. Si osserva che i due vettori dati sono già ortonormali, quindi basta aggiungere al set i vettori costituenti la base canonica di R^4 ed applicare l'algoritmo di estrazione di una base al seguente set:*

$$\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

I primi due vettori sono indipendenti, il terzo vettore è indipendente dai primi due quindi viene mantenuto, il quarto vettore è combinazione lineare del primo vettore (con coefficiente -1) ed il terzo (con coefficiente 2) e quindi viene scartato, il quinto vettore è indipendente dai primi tre quindi viene tenuto mentre l'ultimo è combinazione linare del secondo vettore (con coefficiente -1) ed il quinto (coefficiente 1) e viene scartato.

I quattro vettori rimanenti costituiscono una base di R^4:

$$\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Dati una serie di vettori linearmente indipendenti, l'algoritmo di Gram-Schmidt consente di estrarre un pari numero di vettori ortogonali generanti lo stesso spazio generato dai vettori di partenza:

Sia $proj_u(v) = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \cdot u$ e siano dati i vettori di partenza linearmente indipendenti $v_1, ..., v_n$ i vettori ortogonali indicati con $u_1, ..., u_n$ si ricavano mediante la seguente relazione:

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} proj_{u_j}(v_k)$$

Normalizzando i vettori u_k si ottiene una base ortonormale dello spazio desiderato.

VETTORI GEOMETRICI

Operazioni algebriche sui vettori, prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto, modulo, angolo, ortogonalità. Espressione cartesiana del prodotto scalare e vettoriale.

GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO
Rappresentazioni di punti e rette, distanze, angolo di due rette, parallelismo e perpendicolarita?, fasci d'i rette, circonferenze, fasci di circonferenze.

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO
Riferimenti cartesiani nello spazio e loro trasformazioni, equazioni di rette e piani, parametri direttori di rette e piani. Distanze. Rette sghembe e minima distanza. Angoli di rette e piani. Parallelismo e ortogonalita? di rette e piani. Fascio di piani.

MATRICI
Generalità sulle matrici, operazioni, dipendenza lineare, determinante, rango, inversa di una matrice quadrata, matrici ortogonali.

SISTEMI LINEARI
Nozioni fondamentali, teorema di Cramer, teorema di Rouche? - Capelli, procedimento di risoluzione di un sistema lineare, sistemi lineari omogenei.

SPAZI VETTORIALI
Operazioni tra vettori, sottospazi, dimensione, generatori e basi, somma ed intersezione di sottospazi, cambio di base.

FUNZIONI LINEARI
Generalita', nucleo ed immagine, funzioni lineari e matrici, funzioni lineari iniettive e suriettive.

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI
Definizione, interpretazione geometrica, polinomio caratteristico, similitudine di matrici, diagonalizzazione, diagonalizzazione ortogonale di matrici reali e simmetriche.

SPAZI EUCLIDEI
Forme quadratiche, segno, riducibilita', riduzione a forma canonica. Prodotto scalare euclideo in R^n , modulo di vettori, angolo di vettori. Basi ortonormali.

CONICHE
Nozioni fondamentali sulle curve algebriche. Proprietà elementari delle coniche, equazioni canoniche, riduzione a forma canonica, riconoscimento, centro, assi, asintoti di una iperbole. Fasci di coniche.

QUADRICHE
Sfere, coni, cilindri. Quadriche, quadriche di rotazione, equazioni delle quadriche in forma canonica.