Sistemi Lineari

Mattia Natali

29 giugno 2011

Indice

1 Sistema dinamico

Abbiamo un componente con un ingresso $u(t)$ e un uscita $y(t)$.

1.1 Matrice $[A, b, c^T, d]$

$$\begin{array}{cc} A & \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} & b & \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} \\ c^T & \begin{bmatrix} . & . & . & . \end{bmatrix} & d & [.] \end{array}$$

1.1.1 Tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned} \tag{1}$$

Noto $x(0)$ e l'ingresso $u(t)$ nel tempo con $t \in [0, T)$, la soluzione di questa equazione esiste ed è unica (soluzione di Cauchy). Con la seconda equazione possiamo calcolare l'uscita, mentre la prima equazione determiniamo le equazioni di stato. Grazie a questa matrice possiamo sapere la dinamica del sistema $\forall t \in [0, T)$.

Quando il sistema è pensato così nel "rettangolo" del componente si scrive A, b, c^T, d.

1.1.2 Tempo discreto

In questo caso non avremo la derivata perchè il tempo non è continuo, quindi il sistema cambia.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) + du(t) \end{aligned}$$

Questo metodo discrivere i sistemi si chiama, modello dogmatico. Perchè partiamo dal presupposto che dentro il nostro componente esistano proprio le variabili di stato che descrivono l'evoluzione dell'uscita.

1.2 Metodo empirico

Questo modello coinvolge solamente l'ingresso ed uscita senza sapere nulla delle variabili di stato x_n.

1.2.1 Modello ARMA

Si guarda il componente dall'esterno e, controllando l'ingresso e guardando le evoluzioni dell'uscita, si cerca di individuare la legge. Questo atteggiamento porta spontaneamente ad una descrizione di tipo ARMA (Auto-Regressive Moving Average)

$$Nu\left(t\right) = Dy\left(t\right)$$

con N significa numeratore e D denominatore. Utiliziamo anche l'operatore p che nel caso continuo diventa operatore s, mentre nel caso discreto si chiama operatore z.

Esempio nel caso continuo:

$$pu = \left(1 + p^2\right) y \longleftrightarrow \dot{u} = y + \ddot{y}$$

Se un componente viene modellizzato così viene scritto N, D.

1.2.2 Funzione di trasferimento

È un caso particolare del modello ARMA. Esso non è altro che il rapporto di N e D ossia

$$G\left(p\right) = \frac{N\left(p\right)}{D\left(p\right)} = f.d.t.$$

Bisogna dire che N, D devono essere coprimi, ossia non hanno zeri in comune. Se si semplifica qualcosa perchè hanno zeri in comune perdiamo informazioni rispetto al modello ARMA.

2 Esempi con l'operatore p

2.1 Integratore

$$y\left(t\right) = \int_0^T u\left(s\right) ds$$

questo significa che

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{s} u \\ sy &= u \end{aligned}$$

con $D = s$ e $N = 1$

$$G = \frac{1}{s}$$

2.2 Caso Newton

Esso afferma che $F = ma$, ma l'accelerazione è la derivata della velocità che è la derivata della posizione ossia

$$\begin{aligned} F &= m\ddot{y} \\ u &= ms^2 y \end{aligned}$$

Ricordiamo che il coefficiente di u è il nostro numeratore N, quindi

$$G = \frac{1}{ms^2}$$

2.3 Esempio Ritardatore

Il ritardatore restituisce il segnale in ingresso con un certo ritardo τ.

Ora dimostriamo che

$$y\left(t\right) = u\left(t-\tau\right) \Longleftrightarrow y\left(t\right) = e^{-\tau s} u\left(t\right)$$

Dimostrazione. Faccio lo sviluppo di Taylor di $y(t) = u(t - \tau)$:

$$y(t) = u(t) - \dot{u}(t)\tau + \ddot{u}(t)\frac{\tau^2}{2!} + \dots$$

lo riscriviamo come siamo soliti fare con l'operatore s

$$\begin{aligned} y(t) &= u - s\tau u + \frac{s^2\tau^2}{2!}u + \dots \\ &= u\left(1 - s\tau + \frac{\left(s\tau\right)^2}{2!} + \dots\right) \end{aligned}$$

Quindi siccome

$$e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

allora abbiamo che

$$y = e^{-\tau s}$$

□

Quindi alla fine il ritardatore è un sistema lineare che ha una funzione di trasferimento:

$$y\left(t\right) = e^{-\tau s} u\left(t\right)$$

2.4 Serbatoio

$$G = \frac{1}{1 + sT}$$

3 Aggregati di sottoinsiemi

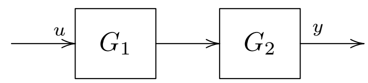
È una regola per sommare le varie funzioni di trasferimento di vari modelli

3.1 Tipologie

Esistono tre tipi:

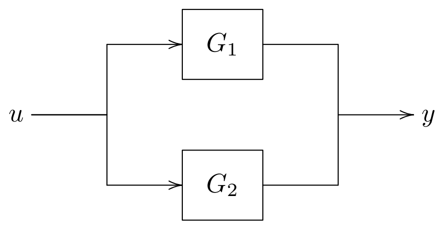
- A **cascata**:

$$G = G_1 G_2$$



- **Parallelo**:

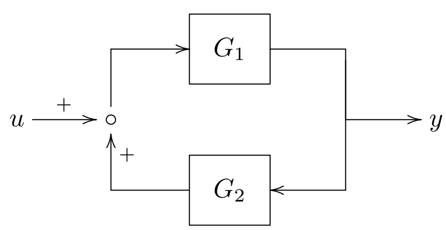
$$G = G_1 + G_2$$



- **Retroazione**: è frequentemente usato nei problemi in cui si vuole far funzionare il sistema secondo certe regole, quindi è molto usato in automatica per controllare l'uscita. Abbiamo due formule:

  - *Retroazione positiva*: usando la regola di Mason spiegata sotto abbiamo

$$G = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2}$$



  - *Retroazione negativa*: cambia solo un segno

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

3.2 Formula di Mason

Supponiamo di avere una rete in cui tutti i componenti hanno la loro funzione di trasferimento. La formula che dà la funzione di trasferimento del sistema è

$$G = \frac{\sum_k C_k \Delta_k}{\Delta} \tag{2}$$

con C_k è il k-esimo cammino diretto tra l'ingresso e uscita. Noi dobbiamo individuare tutti i possibili cammini diretti per far si che il risultato sia giusto. In altre parole sono i vari cammini con cui riusciamo a collegare l'ingresso e uscita.

Per definizione sappiamo che se i componenti sono a cascata la funzione di trasferimento del cammino è una serie di prodotti, quindi $C_k = G_1 G_3 \ldots$

Δ è il determinate del sistema che è

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_i \sum_j L_i L_j - \sum_i \sum_j \sum_h L_i L_j L_h + \dots$$

dove L_i sono i vari loop semplici presenti sul cammino, ossia sono i cammini chiusi che "tornano indietro". La prima sommatoria è estesa a tutti gli anelli, la seconda alle coppie di anelli disgiunti (cioè che non si toccano) e così via... I segni della formula non interferiscono con i singoli segni che L_i ha.

Δ_k è il determinante ridotto in cui non ci sono più i termini dei loop che vengono "toccati" dal cammino k-esimo.

3.2.1 Esempio sul lucido

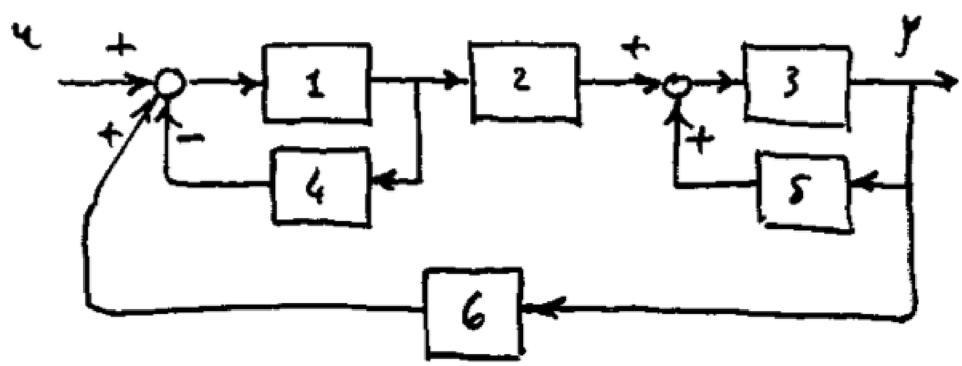


Figura 1: Sistema preso come esempio

Come possiamo vedere dalla Figura 1 ci sono 3 anelli: $(1,4), (3,5), (1,2,3,6)$, di cammini diretti ce n'è solo uno $(1,2,3)$.

Quindi della nostra formula (2) il denominatore sarà

$$1 + G_1G_4 - G_3G_5 - G_1G_2G_3G_6 - G_1G_4G_3G_5$$

perchè $(G_1G_4), (G_3G_5), (G_1G_2G_3G_6)$ sono i loop presenti nel sistema mentre $G_1G_4G_3G_5$ è l'unica coppia di loop presente che non si toccano. Dobbiamo stare bene attenti ai segni che assumono i vari termini.

Il numeratore visto che abbiamo solo è solo un cammino diretto tra l'ingresso e uscita uno avremo

$$C_1 = G_1G_2G_3$$

mentre il valore di $\Delta_k = 1$ perchè il cammino diretto tocca tutti i loop che vi sono.

Quindi in definitiva la formula di trasferimento è

$$G = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_4 - G_3G_5 - G_1G_2G_3G_6 - G_1G_4G_3G_5}$$

3.2.2 Esempio studenti

In ingresso u abbiamo gli studenti che si iscrivono alla scuola mentre y sono gli studenti che escono dalla scuola diplomati. Sicuramente ci sono dei bocciati che rifanno l'anno, quindi avremo dei loop. β_i è il coefficiente di bocciatura. Chi esce dalla prima media sono

$$1 - \beta_1$$

Stesso discorso con le altre due classi. Alla fine avremo 3 loop collegati a cascata che alla fine semplificando avremo tre componenti in cascata. Facciamo il prodotto e abbiamo la funzione di trasferimento della scuola media.

4 Cambiamento di coordinate

Scegliamo un sistema di riferimento diverso per semplificare i conti. Per esempio effettuando una translazione o una rotazione, oppure cambiare smplicemente l'unità di misra. I punti vengono rappresentati da un vettore. Per effettuare un cambio di coordinate da x a z faccio

$$z = Tx$$

I vettori colonna costituenti la matrice T sono i versori dello spazio X letti nello spazio Z.

4.1 Esempio: rotazione di indici

Per effettuare una rotazione usiamo la seguente matrice T. Le colonne della matrice T sono i versori della nuova base.

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

questo cambiamento $z = Tx$ può essere scritto a sistema in questo modo

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 \\ z_2 &= x_1 \end{aligned}$$

In forma vettoriale

$$x = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \longrightarrow z = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix}$$

4.2 Sistemi equivalenti

Abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

utilizzando la trasformazione $z = Tx$ che è equivalente a $x = T^{-1}z$ quindi avremo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T\dot{x} = T\left(Ax + bu\right) = TAT^{-1}z + Tbu \\ y &= c^T x + du = c^T T^{-1} z + du \end{aligned}$$

siamo passati dalla classica quaterna A, b, c^T, d alla quaterna

$$\left(A, b, c^T, d\right) \xrightarrow{T} \left(TAT^{-1}, Tb, c^T T^{-1}, d\right)$$

d non risente il cambiamento delle variabili di stato perchè è l'ingresso che influenza direttamente l'uscita, quindi scavalca il cambiamento.

5 Movimento e traiettoria

Se fissiamo $x(0)$ e abbiamo $u(t)$ per $t \geq 0$ possiamo calcolare il **movimento** di $x(t)$ ossia la sua evoluzione nel tempo. Il movimento è del I ordine se x è uno scalare $(x \in \mathbb{R})$; è del II ordine se $\vec{x}$ è un vettore con $n = 2$. Il movimento è una proiezione della linea rappresentatnte il movimento nello spazio $\mathbb{R}^n$. L'insieme $\{x\,(t)\,,\ t \geq 0\}$ viene definito **traiettoria** o **orbita**.

5.1 Ciclo e equilibrio

Supponiamo che u sia periodica ossia

$$u(t) = u(t+T) \quad \forall t$$

e anche x sia periodico (dello stesso periodo T), allora anche l'uscita y è **periodica**.

Quando l'ingresso e le variabili di stato sono periodiche dello stesso periodo T, in questo caso si definisce il sistema è in **regime periodico** (o **ciclico**). Lo stato si muove su una traiettoria chiusa dove ricomincia il ciclo nei periodi kT. Questa traiettoria si chiama **ciclo**.

Certe volte si possono avere dei cicli anche con ingresso costante. Un esempio classico è il circuito LC (induttore e condensatore in serie) o il pendolo senza attrito.

Se invece l'ingresso è costante come lo sono le variabili di stato (e quindi anche l'uscita) si dice che il sistema è in **regime stazionario** (o **all'equilibrio**). La traiettoria è solamente un punto fisso $(\bar{x})$ perchè non varia nel tempo. In definitiva se un sistema è in regime stazionario avremo

$$u\,(t) = \bar{u} \quad x\,(t) = \bar{x} \quad y\,(t) = \bar{y} \quad \forall t$$

5.2 Come calcolare l'equilibrio di un sistema di sistema lineare

5.2.1 Tempo continuo

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + bu \\ y & = & c^T x + du \end{array}$$

per calcolare l'equilibrio si pone $\dot{x} = 0$ poichè $\bar{x} =$ costante

$$\begin{array}{rcl} A\bar{x} & = & -b\bar{u} \\ \bar{y} & = & C^T \bar{x} + d\bar{u} \end{array}$$

se il determinante di A sia $detA \neq 0$ allora avremo

$$\begin{array}{rcl} \bar{x} & = & -A^{-1}b\bar{u} \\ \bar{y} & = & \underbrace{\left(d - c^T A^{-1} b\right)}_{\mu} \bar{u} \end{array}$$

Con μ **guadagno**. Per calcolare $\bar{x}$ non è necessario usare per forza queste equazioni, perchè invertire la matrice A è molto complesso. Se invece A è una matrice singolare (det$A = 0$) allora o non esistono soluzioni oppure ne esistono infinite.

Per fare velocemente i conti utilizzate la **regola della mamma** (perchè la regola è solo una come la mamma): risolvete la prima equazione rispetto a x_1. Poi quello ottenuto lo sostituiamo nella seconda equazione, poi risolviamo rispetto a x_2 e si sistutisce nella terza equazione e così via finchè risolviamo rispetto a tutte le variabili x_i.

5.2.2 Tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

per calcolare l'equilibrio si pone $\bar{x} = x(t+1) = x(t)$

$$\begin{aligned} (I - A)\bar{x} &= -b\bar{u} \\ \bar{y} &= C^T \bar{x} + d\bar{u} \end{aligned}$$

se il determinante di $(I - A)$ sia $det(I - a) \neq 0$ allora avremo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -(I - A)^{-1} b\bar{u} \\ \bar{y} &= \underbrace{\left(d - c^T (I - A)^{-1} b\right)}_{\mu} \bar{u} \end{aligned}$$

Con μ ancora una volta definito guadagno.

6 Calcolo del guadagno

Il guadagno è definito come il rapporto tra uscita e ingresso all'equilibrio $\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$. Se ciò che entra esce senza perdite o crescite il guadagno è unitario $(\mu = 1)$.

Quando non abbiamo direttamente l'ingresso e l'uscita possiamo usare queste formule per calcolare il guadagno μ

6.1 Matrice $\left(A, b, c^T, d\right)$

- Tempo continuo: $\mu = d - c^T A^{-1} b$
- Tempo discreto: $\mu = d + c^T (I - A)^{-1} b$

6.2 Modello ARMA

Per rircordarci il modello ARMA possiamo chiamarlo "modello nudy" ossia

$$Nu(t) = Dy(y)$$

con

$$\begin{aligned} N &= \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \cdots + \beta_n \\ D &= p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n \end{aligned}$$

- Tempo continuo:
$$\mu = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \tag{3}$$
tutti gli altri valori non ci sono perchè se ci ricordiamo l'operatore p sarebbero delle derivate, e le derivate sono tutte costanti quindi $p = 0$.
- Tempo discreto:
$$\mu = \frac{\sum \beta_i}{1 + \sum \alpha_i} \tag{4}$$

6.3 Funzione di trasferimento

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Tempo continuo: $\mu = G(0)$
- Tempo discreto: $\mu = G(1)$

Si noti che, indicata con $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo, la (3) è equivalente a $\mu = G(0)$, per cui il guadagno μ è uguale alla funzione di trasferimento valutata per $s = 0$. Nel caso dei sistemi a tempo discreto con funzione di trasferimento $G(z)$ dalla (4) segue invece che $\mu = G(1)$, cioè il guadagno è uguale alla funzione di trasferimento valutata per $z = 1$.

7 Formula di Lagrange

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$$

Applicando in ogni istante di tempo t

$$x(0) \longrightarrow x(1) = Ax(0) + bu(0)$$

$$\begin{aligned} x(2) &= A^2 x(0) + Abu(0) + bu(1) \\ &= \ldots \\ x(t) &= A^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} bu(i) \end{aligned}$$

mentre per il tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ avremo

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\xi)} bu(\xi)\, d\xi$$

In conclusione notiamo che abbiamo due termini per entrambe le equazioni

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)\, x(0)}_{\text{movimento libero}} + \underbrace{\psi(t)\, u(s)}_{\text{movimento forzato}} \qquad s \in [0, t) \tag{5}$$

$\Phi(t)$ si chiama **matrice di transizione**

$$\Phi(t) = \begin{cases} A^t & \text{per sistemi a tempo discreto} \\ e^{At} & \text{per sistemi a tempo continuo} \end{cases}$$

ricordiamo che e^{At} è la matrice esponenziale che viene definita in questo modo:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!}$$

questa matrice esponenziale è possibile calcolarla esplicitamente solo se è molto semplice o in casi molto particolari.

Possiamo notare dall'equazione (5) che lo stato del sistema è in ogni istante dato dalla somma di due contributi, il primo dipendente linearmente dallo stato iniziale e il secondo dipendente linearmente dall'ingresso.

Il motivo di questa denominazione nella (5) è il seguente: $\Phi(t)\, x(0)$ rappresenta l'evoluzione del sistema "libero" cioè del sistema a cui è applicato ingresso nullo, mentre $\psi(t)\, u(s)$ con $s \in [0, t)$ rappresenta l'evoluzione del sistema inizialmente scarico ($x(0) = 0$) ma forzato dall'ingresso $u(s)$.

7.1 Significato di $\varphi_{i,j}(t)$ (elemento (i,j) di Φ)

$$\vec{x_j}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \leftarrow j \qquad u = 0 \quad x_i(t) = \sum_j \varphi_{i,j} \vec{x_j}(0) = \varphi_{i,j}$$

Ponendo l'uscita $u = 0$, possiamo denotare l'elemento (i,j) di Φ ossia $\varphi_{i,j}(t)$ in questo modo: $\varphi_{i,j}(t)$ è il valore che assumerebbe la variabile di stato x_i se solo l'uscita x_j fosse attiva. In altre parole è l'influenza di j su i. Quindi $x_i(t) = \sum_j \varphi_{i,j} \vec{x}_j(0)$ significa che la variabile di stato $x_i(t)$ può essere vista come la somma di tutti i contributi delle variabili di stato che influenzano x_i moltiplicato per $\vec{x}(0)$.

7.2 Esempio: formula ammortamento

Abbiamo i seguenti dati:

- $x(t) =$ debito nell'anno t.
- $x(0) = D$ debito iniziale: sono i soldi che ci ha dato la banca.
- $x(t+1) = x(t) + \rho x(t) - A^*$ con A^* ammortamento annuo e ρ fattore di interesse annuo.

Se vogliamo estinguere il debito in N anni imponiamo

$$x(N) = 0$$

perchè dopo N anni vogliamo che il debito sia estinto.

Dalla formula di Lagrange e ponendo $t = N$ e $u(s) = A^*$ abbiamo che

$$x(N) = (1-\rho)^N D - A^* \sum_{i=0}^{N-1} (1-\rho)^{N-i-1}$$

cioè il debito da pagare di quest'anno è quello dell'anno scorso e un ρ in più. Il primo termine è il movimento libero

$$\Phi(t)\, x(0) = x(0) + \rho^N x = D + \rho^N D = (1-\rho)^N D$$

Imponendo $x(N) = 0$, può essere risolto rispetto ad A^*

$$A^* = \frac{(1-\rho)^N}{\sum_{i=0}^{N-1} (1-\rho)^{N-i-1}} D = \underbrace{\frac{\rho}{1-(1-\rho)^{-N}} D}_{\text{formula nota agli economisti}}$$

7.3 Principio di sovrapposizione

Siccome sono sistemi lineari possiamo applicare questo principio. Sommando le cause si sommano gli effetti.

8 Reversibilità

È possibile assegnando lo stato iniziale e l'ingresso in un intervallo di tempo $[0, T)$, determinare "il passato" del sistema? Se questo è possibile il sistema si definisce **reversibile**.

Ricordando la formula di Lagrange

$$x(t) = \Phi(t) x(0) + \psi(t) u(s)$$

il sistema è reversibile se e solo se la matrice di transizione $\Phi(t)$ è invertibile.

- È *sempre vero* per i sistemi a tempo continuo perchè $\Phi(t) = e^{At}$ è sempre invertibile.
- Per i sistemi a tempo discreto $\Phi(t) = A^t$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, in altre parole la matrice A deve essere *non singolare*.

8.1 Memoria finita

Il sistema è a memoria finita se dopo un certo intervallo T $\Phi(t)$ è nullo ossia matematicamente

$$\Phi(t) x(0) = 0 \quad \forall t > T, \ \forall x(0)$$

in altre parole i sistemi a memoria finita sono quelli in cui lo stato iniziale influenza l'evoluzione del sistema soltanto per un periodo di tempo finito.

- I sistemi a tempo continuo *non* possono essere a memoria finita.
- Nei sistemi a tempo discreto sappiamo dalla formula di Lagrange che

  $$\Phi(t) x(0) = A^t x(0)$$

  affinchè il sistema sia a memoria finita imponiamo che

  $$A^t x(0) = 0 \quad \forall t > T, \ \forall x(0) \Longleftrightarrow A^t = 0$$

Osservazione: i sistemi a memoria finita sono non reversibili.

Per verificare che una matrice abbia memoria finita bisogna dimostrare che tutti i suoi autovalori siano nulli. Ricordiamo che per le matrici triangolari gli autovalori si trovano sulla diagonale principale (esempio shift sui lucidi).

9 Stabilità

La stabilità è la caratteristica più importante dei sistemi dinamici. Ci sono numerose definizioni, facendo riferimento a $\Phi(t) x(0)$:

- Un sistema è definito **asintoticamente stabile** se e solo se $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$ e quindi tende a zero per $t \to \infty$ $\forall x(0)$. I sistemi a memoria finita sono asintoticamente stabili.
- Un sistema è **semplicemente stabile** se $\Phi(t) x(0)$ rimane limitato $\forall t$ ma non tende a zero per qualche $x(0)$.
- È **instabile** se $\Phi(t) x(0)$ è illimitato per qualche $x(0)$.

L'instabilità a sua volta si suddivide in:

- **Instabilità debole** se è una instabilità di tipo polinomiale (formula di Newton).
- **Instabilità forte** se è di tipo esponenziale (conigli di Fibonacci).

9.1 Osservazioni:

- La stabilità dipende solo dalla matrice A.
- L'asintotica stabilità si chiama generalmente stabilità, quindi perdiamo l'informazione se è semplice o asintotica, ma quella semplice è un evento molto raro.
- Un sistema asintoticamente stabile dimentica il proprio passato, quindi lo stato iniziale diventa evanescente col passare del tempo.
- I sistemi instabili sono "esplosivi", ossia qualche sua varibile tende prima o poi all'infinito.
- La stabilità non è sempre una buona caratteristica, per esempio può significare che una data popolazione si sta estinguendo.
- Un sistema è asintoticamente stabile se e solo se per ogni ingresso $u(t) = \bar{u}$ (costante) esiste un solo stato di eqilibrio corrispondente verso cui tende lo stato del sistema per qualsiasi $x(0)$. Ossia se gli do un ingresso costante il sistema tende sempre ad un particolare valore indipendentemente dal valore costante dell'ingresso.

  Dimostrazione. Ultimo punto

  Asintotica stabilità significa che

$$x(t) = e^{At}x(0) \to 0 \quad \forall x(0)$$

  Noi abbiamo un sistema di questo tipo, applicando un ingresso costante $\bar{u}$ abbiamo

$$\dot{x} = Ax + b\bar{u}$$

  se esso tente all'equilibrio significa che tenderà ad un $\bar{x}$ costante. Noi possiamo cambiare le variabili in

$$z = x(t) - \bar{x} \to x(t) = z + \bar{x}$$

  ossia abbiamo le coordinate $x(t)$ misurate dell'equilibrio $\bar{x}$ e non più dall'origine. Quindi avremo

$$\dot{z} = \dot{x} = Ax + b\bar{u} = A(z + \bar{x}) + b\bar{u} = Az + \overbrace{A\bar{x} + b\bar{u}}^{=\dot{x}=0}$$

  con $A\bar{x} + b\bar{u} = 0$ perchè la derivata di una costante è nulla. Quindi possiamo vedere che $\dot{z}$ è indipendente dall'ingresso $\bar{u}$.

$$\dot{z} = Az$$

  □

9.2 Metodi per l'analisi della stabilità

- Metodo intuitivo: prima di fare calcoli meglio ragionare e vedere se un sistema è per forza stabile per ovvi motivi.
- Metodo delle simulazioni.
- Metodo degli autovalori.
- Metodi tabellari: permette di sapere se un sistema è asintoticamente stabile e niente di più, quelli più noti si chiamano di Rauth e di Hurwitz.
- Metodo di Liapunov

9.2.1 Metodo delle simulazioni

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax \\ x(t+1) & = & Ax(t) \end{array}\right\} x(t) = \Phi(t)\, x(0)$$

Noi verifichiamo che un sistema è asintoticamente stabile se e solo se $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$. Il metodo consiste nell'effettuare, al più, n simulazioni. In pratica si pongono diversi stati iniziali

$$x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \text{ poi } = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \text{ e così via...}$$

così facendo $x(t)$ risultante coincide con la I colonna di $\Phi(t)$, poi con la II colonna e così via (vedi sezione 7.1). Se $x(t)$ non tende a 0 per qualche simulazione ci si può fermare e concludere che il sistema non è asintoticamente stabile.

9.2.2 Metodo degli autovalori

Sappiamo dalla formula di Lagrange che la soluzione con ingresso nullo e *tempo continuo*

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

allora sappiamo che

$$\begin{cases} A < 0 & \text{Asintoticamente stabile} \\ A = 0 & \text{Stabilità semplice} \\ A > 0 & \text{Instabile} \end{cases}$$

questo vale se x è uno *scalare*.

Per il *tempo discreto* abbiamo

$$x(t+1) = A(t) \Rightarrow x(t) = A^t x(0)$$

avremo che

$$\begin{cases} A < 1 & \text{Instabile} \\ A = -1 & \text{Semplicemente stabile} \\ -1 < A < 0 & \text{Asintoticamente stabile} \\ A = 0 & \text{Asintoticamente stabile (memoria finita)} \\ 0 < A < 1 & \text{Asintoticamente stabile} \\ A = 1 & \text{Semplicemente stabile} \\ A > 1 & \text{Instabile} \end{cases}$$

In conclusione:

- Asintoticamente stabile $\Leftrightarrow |A| < 1$.
- Instabile $\Leftrightarrow |A| > 1$.

Ora passiamo nel *caso di ordine maggiore del primo* (utilizziamo i vettori e matrici). Abbiamo a che fare con gli **autovalori** che si calcolano in questo modo

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

gli autovalori sono i λ_i.

A è asintoticamente stabile se e solo se

$$\begin{cases} \text{Re}\,(\lambda_i) < 0\ \forall i & \text{Tempo continuo} \\ |\lambda_i| < 1\ \forall i & \text{tempo discreto} \end{cases}$$

o detto in modo complementare avremo A instabile se e solo se

$$\begin{cases} \exists i \mid \text{Re}\,(\lambda_i) > 0 & \text{Tempo continuo} \\ \exists i \mid |\lambda_i| > 1 & \text{Tempo discreto} \end{cases}$$

Un metodo veloce è di scrivere i risultati sul piano di Gauss. Nel tempo continuo se troviamo almeno un risultato nel semipiano positivo dei numeri reali significa che è instabile, nel tempo discreto invece giungiamo alla stessa conclusione se abbiamo un risultato esterno dal cerchio unitario centrato sull'origine.

10 Geometria del movimento libero

Ad ogni autovalore reale è associato un **autovettore**

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)} \quad x^{(i)} \neq 0$$

Poichè $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x}$ è il vettore tangente alla traiettoria segue che la traiettoria che parte da $x(0) = x^{(i)}$ è una retta per l'origine. Se $\lambda_i < 0$ allora $\dot{x}$ è opposto a x, cioè la traiettoria tende verso l'origine. Viceversa, se $\lambda_i > 0$ la traiettoria è percorsa dall'origine verso l'infinito.

Più un autovalore $|\lambda_i|$ è grande più il movimento è veloce, ossia ci si allontana o ci si avvicina all'origine più velocemente rispettivamente se $\lambda_i \gg 0$ o $\lambda_i \ll 0$.

L'origine in cui partono o entrano le frecce della traiettoria si chiamano **nodi**.

- Se abbiamo tutti gli autovalori negativi abbiamo un **nodo stabile**. Tutte le frecce convergono nell'origine.
- Autovalori discordi abbiamo una **sella**. Alcune frecce escono, altre entrono nella nostra origine.
- Autovalori tutti positivi abbiamo un **nodo instabile**. Tutte le frecce della traiettoria escono.

Possiamo avere dei casi particolari in cui un autovalore è nullo $\lambda_i = 0$, in questo caso abbiamo una retta composta da infinite "sorgenti" o "pozzi" (utilizzando il gergo di Analisi 2). **Sorgente** è un punto in cui escono le frecce, **pozzo** vi entrano. Se invece abbiamo due autovalori nulli $\lambda_i = \lambda_j = 0$ abbiamo un piano formato da pozzi e sorgenti. Se alla fine abbiamo tutti gli autovalori nulli significa che non si muove niente: tutto lo spazio è formato da punti di equilibrio.

10.1 Autovalori complessi

Abbiamo delle traiettorie che non sono più rettilinee. Abbiamo delle traiettorie che "girano", che possono allontanarsi o avvicinarsi dall'origine. Matematicamente avremo:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= a \pm ib \\ e^{\lambda_1} &= e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \\ e^{\lambda_1} &= e^{(a-ib)t} = e^{at} e^{-ibt} = e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \end{aligned}$$

Possiamo avere delle oscillazioni modulati in frequenza (sia amplificati con $a > 0$ sia smorzati con $a < 0$). Possiamo avere delle spirali che si avvicinano o si allontanano dall'origine rispettivamente se sono stabili o instabili. In ultima analisi possiamo avere dei cerchi concentrici se gli autovalori sono immaginari senza parte reale.

10.2 Sistemi del III ordine

Prendiamo il caso in cui abbiamo un autovalore reale negativo e due complessi coniugati con parte reale positiva. Siccome l'unico autovalore reale è negativo significa che ci avviciniamo verso l'origine su una traiettoria. Associato alla coppia degli autovalori complessi coniugati abbiamo un piano in cui abbiamo delle spirali che sia allontanano dall'origine perchè la loro parte reale è positiva. Le varie possibili traiettorie saranno quindi l'unione di queste due tipologie di traiettorie.

10.3 In generale

Possiamo suddividere in tre tipologie di autovalori:

- n^-: autovalori con parte reale negativa (stabili).
- n^+: autovalori con parte reale positiva (instabili).
- n^0: autovalori con parte reale nulla.

Ovviamente $n = n^- + n^+ + n^0$ con n numero di autovalori. Ai vari autovalori definiti in precedenza associamo rispettivamente:

- X^-: **varietà stabile**. In questo iperpiano abbiamo le traiettorie che tendono verso l'origine.
- X^+: **varietà instabile**. In questo iperpiano abbiamo le traiettorie che si allontanano dall'origine.
- X^0: **varietà centro**. Le traiettorie non convergono e non divergono. Oppure divergono ma lentamente, ossia con legge polinomiale e non esponenziale (esempio Newton).

10.3.1 Sistemi:

I sistemi quindi si suddividono in:

- **Iperbolici:** non esiste il sottospazio X^0. Esso si suddivide a sua volta:

$$\begin{cases} \text{attrattori} & n^- = n \quad \left(n^+ = n^0 = 0\right) \\ \text{repulsori} & n^+ = n \quad \left(n^- = n^0 = 0\right) \\ \text{selle} & n^0 = 0,\ n^+ = n^- \neq 0 \end{cases}$$

- **Non iperbolici:** esiste il sottospazio X^0.

11 Test di asintotica stabilità

Ora introdurremo alcuni metodi per verificare se un sistema è asintoticamente stabile.

11.1 Test Veloce

11.1.1 Tempo continuo

$$\dot{x} = Ax$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

calcolo la traccia (ossia sommo la diagonale maggiore). Se la matrice fosse diagonale o triangolare sulla diagonale avremmo la somma degli autovalori. Ma la traccia è sempre la somma degli autovalori, anche se è una matrice normale.

- Se tr$A > 0$ allora esiste $\lambda_i > 0$ quindi il sistema è instabile.
- Se invece tr$A < 0$ non possiamo concludere nulla.

11.1.2 Tempo discreto

- Se $|$tr$A| > n$ con n numero di variabili di stato significa che esiste un autovalore $|\lambda_i| > 1$ quindi il sistema è instabile.
- Se $|$tr$A| < n$ non possiamo concludere nulla.

11.2 Asintotica stabilità

Questo criterio vale solo per i sistemi 2×2. Se abbiamo tr$A < 0$ e det$A > 0$ abbiamo asintotica stabilità. Per il sistema a tempo discreto è un po' più complicato (vedi libro).

11.3 Criterio di Hurwitz

Vale solo per i sistemi a tempo continuo. È un *criterio necessario e sufficiente* per l'asintotica stabilità. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A ossia

$$\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

calcoliamo la matrice $n \times n$ che chiameremo H, dove la prima colonna sono i coefficienti dispari del polinomio caratteristico, quando finiamo gli α_n da inserire nella matrice metteremo $\alpha_{n+i} = 0$ con $i > 0$. La seconda colonna saranno gli α pari (il primo è $\alpha_0 = 1$). Spostandoci alla colonna di destra trasliamo il tutto il nostro vettore più basso di 1 ricominciando con gli α dispari, e così via finchè avremo una matrice $n \times n$. Ora calcoliamo i vari determinanti delle matrici di nord-ovest, ossia

$$D_1 = \alpha_1 \quad D_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

quindi alla fine

$$D_i > 0 \ \forall_i \Leftrightarrow \text{asintotica stabilità}$$

11.3.1 Sistemi del II ordine

Poichè $\alpha_3 = 0$ la condizione di asintotica stabilità è

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \text{Regola di Cartesio}$$

11.3.2 Sistemi del III ordine

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_1\alpha_2 > \alpha_3 \\ \alpha_3 D_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 > 0 \quad \alpha_3 > 0 \quad \alpha_1\alpha_2 > \alpha_3$$

12 Costante di tempo dominante

$$\lambda_i \quad \begin{cases} a & \rightarrow & e^{at} = e^{-t/T} \\ a + \text{i}b & \rightarrow & e^{at}\sin(bt+\varphi) = e^{-t/T}\sin(bt+\varphi) \end{cases} \qquad T = -\frac{1}{a}$$

la costante di tempo è la sottotangente come si può vedere dalla Figura 2.

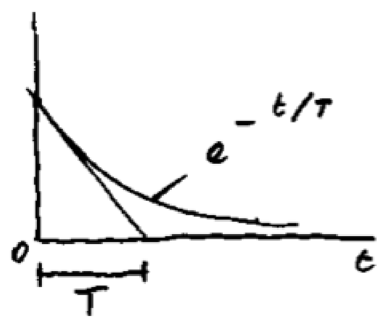


Figura 2: Grafico nel tempo di $x_i(t)$

Il movimento libero di uscita è dato da

$$y_{lib}(t) = \sum_i a_i e^{\lambda_i t}$$

a_i dipendono dallo stato iniziale (per particolarissimi stati iniziali alcuni a_i possono essere nulli), però sui tempi lunghi una delle esponenziali domina le altre, quindi tutti gli altri sono trascurabili. **Quella che muore per ultima è l'esponenziale con il tempo più lungo**, è la sottotangente meno ripida. Guardando i grafici con gli autovalori dobbiamo prendere in considerazione quelli più vicini all'origine per quanto riguarda gli autovalori negativi, quello più lontano dall'origine per quanto riguarda gli autovalori positivi.

In conlusione la **costante di tempo dominante** T_d è quello associato all'autovalore maggiore λ_d, quello più a destra nel grafico, ossia nei tempi continui

$$\lambda_d = \lambda_i \quad \text{con Re}(\lambda_i) = \max$$

nei sistemi a tempo discreto

$$\lambda_d = \lambda_i \quad \text{con } |\lambda_i| = \max$$

Per quanto riguarda la costante di tempo avremo:

- Tempo continuo: $T_d = -\frac{1}{\text{Re}(\lambda_d)}$.
- Tempo discreto: $T_d = -\frac{1}{\log|\lambda_d|}$ perchè $e^{-\frac{t}{T_d}} = |\lambda_d|^t \Rightarrow -\frac{\cancel{t}}{T_d} = \cancel{t}\log|\lambda_d| \Rightarrow T_d = -\frac{1}{\log|\lambda_d|}$.

Il **tempo di dimezzamento** è $T_{1/2} = (\log 2)\,T$, la formula deriva imponendo $e^{-\frac{T_{1/2}}{T}} = \frac{1}{2}$.

13 Stabilità degli aggregati

Spettro (Λ): insieme degli autovalori. Lo spettro risultante, se gli aggregati sono in cascata o in serie $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. L'aggregato risultante è asintoticamente stabile se e solo se sono tali tutti i sottosistemi. Con la retroazione *non* vale questo discorso. Anzi potrebbe crearsi l'instabilità anche se abbiamo degli aggregati stabili

13.1 Regola delle tre costanti di tempo (o di Rinaldi)

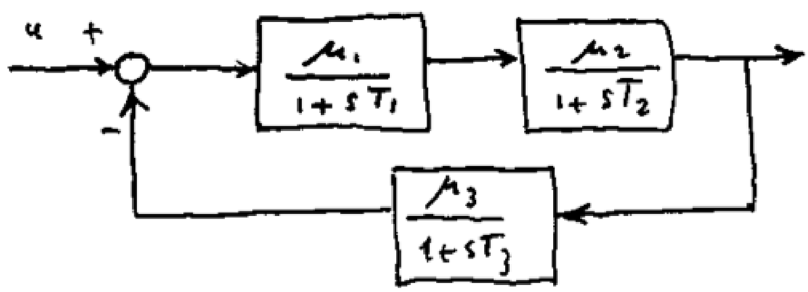


Figura 3: Sistema di riferimento per la regola di Rinaldi

Il guadagno dell'anello ($G(0)$) è per definizione $\mu_1\mu_2\mu_3$ deve essere inferiore ad un guadagno critico

$$\mu_{anello} = \mu_1\mu_2\mu_3 < \mu_{critico} = (T_1 + T_2 + T_3)\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right) - 1$$

La formula funziona solo per la Figura 3, possiamo avere anche tre componenti tutti sulla prima linea, o tutti nella retroazione: l'importante è avere tre componenti nell'anello. Per la dimostrazione guardare il lucido.

14 Raggiungibilità

Ora cominciamo a considerare il movimento forzato della funzione di Lagrange, vediamo di determinare gli stati raggiungibili dall'origine (ossia $x(0) = 0$) in tempo finito.

$$x(t) = \Phi(t)\,x(0) + \underbrace{\Psi(t)\,u(s)}_{\text{movimento forzato}} \qquad s \in [0, t)$$

Definizione: un sistema è **completamente raggiungibile** se $X_r = R^n$, cioè se è possibile raggiungere in tempo finito qualsiasi stato. X_r è definito in questo modo

$$X_r = x(t) = \Psi(t)\,u(s) \quad s \in [0, t), t \text{ finito}$$

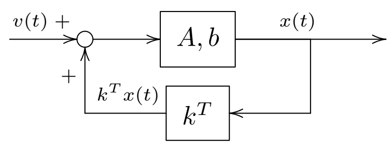
Proprietà: il sistema è completamente raggiungibile se e solo se questi n vettori $\left\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\right\}$ rappresentano una base (vettori linearmente indipendenti). In altre parole dobbiamo verificare che questi n vettori sono linearmente indipendenti, essi si chiamano **vettori di raggiungibilità**. Un altro metodo ancora è scrivere la matrice

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

e verificare che $\det R \neq 0$.

14.1 Legge di Controllo

Se noi poniamo una legge di controllo del tipo $u(t) = k^T x(t) + v(t)$ ossia controlliamo l'uscita attraverso un componente (*controllore*) per poi regolare l'entrata attraverso una retroazione, graficamente parlando



notiamo che andiamo a modificare la matrice A

$$\dot{x} = Ax + b\left(k^T x + v\right) = \left(A + bk^T\right)x + bv$$

e quindi applichiamo formalmente la seguente trasformazione

$$(A, b) \longrightarrow \left(A + bk^T, b\right)$$

Proprietà fondamentale (fissabilità degli autovalori): Gli autovalori del sistema controllato $\left(A + bk^T, b\right)$ possono essere fissati ad arbitrio (per mezzo di un controllore k^T) se e solo se il sistema (A, b) è completamente raggiungibile.

14.2 Osservazione e ricostruzione dello stato

Se un sistema è **osservabile** significa che è possibile calcolare lo stato iniziale $x(0)$ conoscendo l'ingresso o uscita nell'intervallo di tempo $[0, T)$. Se si riesce a "osservare" lo stato, allora si riesce certamente a *ricostruirlo*, ossia determinare lo stato finale $x(t)$ perchè $x(0) + u(\cdot) \Rightarrow x(t)$.

Definizione. Un sistema è **completamente osservabile** se per T sufficientemente elevato è possibile determinare $x(0)$ dalla coppia $(u(\cdot), y(\cdot))_{[0,T)}$. Questo implica che non esistono degli stati diversi tra loro che, avendo lo stesso ingresso, generano la stessa uscita. Ma verificare se un sistema è completamente osservabile seguendo la definizione è molto difficile, bisogna trovare una funzione tale che $x(0) = F(u(\cdot), y(\cdot))$.

Osservando gli stati $y(t)$ avremo un sistema a n equazioni con n incognite (vettore $x(0)$):

$$\begin{cases} y(0) = c^T x(0) + du(0) \\ y(1) = c^T x(1) + du(1) = c^T Ax(0) + c^T bu(0) + du(1) & \text{sapendo che: } x(1) = Ax(0) + bu(0) \\ y(2) = c^T A^2 x(0) + c^T Abu(0) + c^T bu(1) + du(2) \\ \vdots \\ y(n-1) = c^T A^{n-1} x(0) + c^T A^{n-2} bu(0) + \cdots + du(n-1) \end{cases}$$

Ora prendiamo la matrice dei coefficienti di $x(0)$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice } (n \times n) \text{di osservabilità}$$

Affinchè il sistema sia completamente osservabile, i **vettori di osservabilità** (gli elementi della matrice di osservabilità) devono essere linearmente indipendenti. Questo accade se e solo se $\det \sigma \neq 0$.

Teorema. *Un sistema è completamente osservabile se l'uscita libera (movimento libero di uscita)* $y_{lib}(t) = c^T \Phi(t) x(0) \neq 0 \ \forall x(0) \neq 0$*, in altre parole se il sistema ha un uscita nulla noi dobbiamo avere lo stato iniziale nullo.*

Infatti formalmente notiamo che

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ \dot{x} &= Ax \Rightarrow \text{formula Lagrange } x(t) = e^{At} x(0) \\ y(t) &= c^T x(t) + \overbrace{\cancel{du}}^{u=0} = c^T e^{At} x(0) \end{aligned}$$

per vedere l'uscita nulla dobbiamo per forza avere $x(0) = 0$, altrimenti non è completamente osservabile.

14.2.1 Esempio (matrice di osservabilità)

Le scuole medie hanno queste matrici:

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ (1-\beta_1) & \beta_2 & 0 \\ 0 & (1-\beta_2) & \beta_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\beta_3) \end{bmatrix}$$

Ora verifichiamo se è completamente osservabile vedendo se

$$\det \sigma = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\beta_3) \\ 0 & (1-\beta_2)(1-\beta_3) & (1-\beta_3)\beta_3 \\ \prod (1-\beta_i) & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \neq 0$$

Ma si vede che la matrice non è singolare perchè i tre vettori sulle righe (vettori di osservabilità) sono linearmente indipendenti ($\det \sigma \neq 0$). Quindi il sistema è completamente osservabile.

14.3 Dualità

Possiamo immaginare il sistema Σ^* come lo specchio di Σ e viene definito come

$$\Sigma = \left(A, b, c^T, d\right) \quad \Sigma^* = \left(A^T, c, b^T, d\right)$$

e il principio di dualità afferma che

- Σ è completamente raggiungibile se e solo se Σ^* è completamente osservabile.
- Σ è completamente osservabile se e solo se Σ^* è completamente raggiungibile.

14.4 Teoria del regolatore

La variabile u la pensiamo come uno scalare per semplicità. Bisogna dall'uscita y ricostruire lo stato attraverso il ricostruttore, poi avendo $\hat{x}$ si determina u. La macchina completa che ricostrusce e controlla l'entrata si chiama regolatore. Il ricostruttore ha il parametro di progetto l. Nel gergo molte volte si chiama controllore anche il regolatore. Il risultato interessante del regolatore è questo: siccome x e $\hat{x}$ hanno le stesse variabili di stato avremo $2n$ variabili di stato. Le variabili che vogliamo avere sono x e $\hat{x} - x$ e non x e $\hat{x}$. Così avremo che:

$$\Delta_{reg}(\lambda) = \Delta_{A+bk^T}(\lambda) \cdot \Delta_{A+lc^T}(\lambda)$$

avevamo studiato che questi due polinomi, il primo poteva essere fissato ad arbitrio (scelto opportunamente il parametro k) se e solo se il sistema (A, b) è completamente raggiungibile. L'altro uguale se è completamente osservabile. Quindi dediciamo che se un sistema è completamente raggiungibile e osservabile allora possiamo prefissare a piacere nostro questi due polinomi caratteristici, quindi possiamo fissare a piacere gli autovalori e di conseguenza abbiamo il sistema del regolatore sotto il nostro completo controllo. In realtà non possiamo avere una coppia di autovalori complessi coniugati quando abbiamo solo uno scalare. Quindi non è proprio possibile mettere gli autovalori a piacere. Se la dimensione del sistema è dispari non possiamo fissare a piacere tutti gli autovalori.

15 Scomposizione in parti

Tutti i sistemi lineari possono essere scomposti al massimo in 4 parti (a, b, c, d). Non è detto che tutte le 4 parti siano presenti.

(a) Parte completamente raggiungibile ma non osservabile (r, no = Raggiungibile, Non Osservabile).

(b) Parte completamente raggiugibile e osservabile (r, o = Raggiungibile, Osservabile).

(c) Parte nè completamente raggiungibile nè osservabile (nr, no).

(d) Parte non completamente raggiungibile ma è osservabile (nr, o).

Questa scomposizione è molto utile perchè possiamo determinare la parte b che è l'unica che effettivamente trasmette il segnale all'uscita ed è manipolabile da noi tramite il controllo dell'entrata. Non tutti i collegamenti tra le varie parti sono possibili, per esempio i collegamenti dall'alto verso il basso non sono possibili, manca anche il collegamento tra $c \to b$ (si perderebbe l'osservabilità).

In modo più analitico possiamo affermare che:

- Raggiungibile si collega a raggiungibile.
- Non raggiungibile può collegarsi sia con raggiungibile che non.
- Osservabile si collega con "tutto".
- Non osservabile solo con non osservabile.
- Se un blocco non si connette per una delle precedenti regole non si connette. Esempio: il blocco c non si collega a b anche se è non raggiungibile (e quindi in teoria si dovrebbe collegare con qualsiasi cosa) perchè è non osservabile.

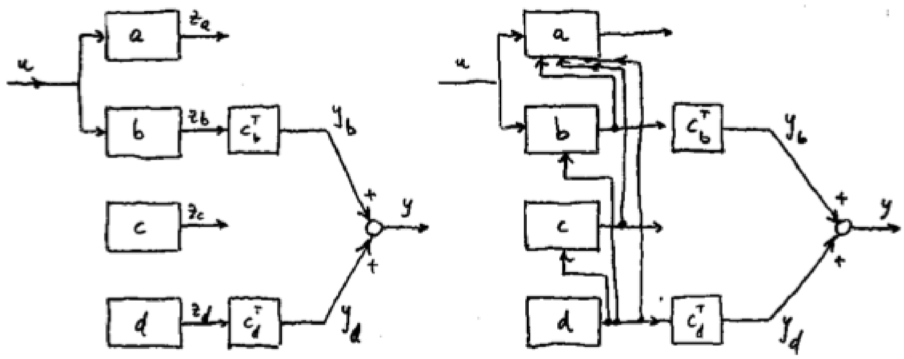


Figura 4: Scomposizione in parte dei sistemi (caso semplice, caso completo)

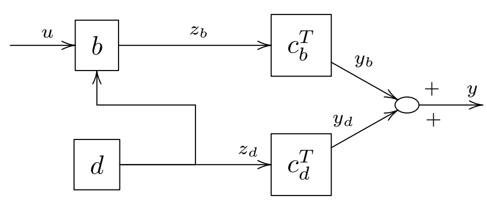
15.1 Scomposizione e autovalori

Possiamo notare che i vari collegamenti non sono retroazionati. Quindi noi sappiamo che gli autovalori del sistema complessivo sono il prodotto dei vari autovalori delle parti, ossia il polinomio caratteristico dell'intero sistema è in realtà il prodotto dei 4 polinomi caratteristici di a, b, c, d:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_a(\lambda) \cdot \Delta_b(\lambda) \cdot \Delta_c(\lambda) \cdot \Delta_d(\lambda)$$

15.1.1 Scomposizione e modello ARMA

L'uscita come abbiamo detto prima dipende soltanto da quello che accade nelle parti b, d.



- Se $z_d(0) = 0 \Rightarrow y_d(t) = 0 \Rightarrow \begin{array}{c} \Delta_b y_b = N_b u \\ \Delta_b y = N_b u \end{array}$, se $z_d(t) = 0$ il sistema è completamente raggiungibile.
- Se invece $z_d(0) \neq 0 \Rightarrow \Delta_b \Delta_d y = N_b \Delta_d u$ in questo caso vediamo che Δ_d è parte comune, era il discriminante tra il modello ARMA e la funzione di trasferimento.

15.2 Poli e Zeri

Il modello ARMA è formato da due polinomi N, D, mentre la funzione di trasferimento è il rapporto tra i due $G = \frac{N}{D} = \frac{N_b \cancel{\Delta_d}}{\Delta_b \cancel{\Delta_d}} = \frac{N_b}{\Delta_b}$: i poli e gli zeri della f.d.t. sono determinati soltanto dalla parte b. Quindi possiamo notare che i poli sono gli zeri del polinomio caratteristico della parte b, ossia della parte completamente raggiungibile e osservabile. Allora possiamo affermare che determinare gli autovalori di un sistema completamente raggiungibile e osservabile è equivalente a determinare i poli della funzione di trasferimento.

16 Stabilità esterna

In inglese viene definito BIBO (Bounded Input Bounded Output). Per verificare la stabilità esterna perturbo l'ingresso e verifico che l'uscita rimanga limitata. Il sistema è **esternamente stabile** se e solo se l'uscita forzata rimane limitata per ogni ingresso limitato.

Teorema. *Il sistema è esternamente stabile se e solo se i poli del sistema sono asintoticamente stabili (se è un sistema continuo la parte reale dei poli < 0, altrimenti il modulo del polo deve essere minore di 1).*

La stabilità esterna interessa solo la parte "b" del sistema ossia quello completamente osservabile e raggiungibile.

16.1 Sfasamento minimo

Un sistema è a **sfasamento minimo** se e solo se non ha zeri oppure, se li ha, sono stabili (per stabilità si intende quella asintotica).

Un sistema ha un **ingresso nascosto** se ha ingressi diversi da 0 in qualche istante che, con stati iniziali opportuni, danno l'uscita identicamente nulla. Come esempio immaginiamo due carrelli collegati da una molla e al secondo viene applicata una forza $u(t)$, il primo carrello non lo possiamo vedere. Se noi vediamo il secondo carrello fermo nella posizione 0, possiamo immaginare che esiste un ingresso nascosto di tipo sinusoidale che compensa la forza impressa dal primo carrello che oscilla a causa della molla.

L'ingresso, per essere nascosto, deve soddisfare la seguente equazione:

$$Nu = 0 \text{ con } u \neq 0$$

questa formula deriva da $Nu = Dy$ con $y = 0$.

Gli ingressi nascosti esistono se e solo se esistono zeri, quindi nei sistemi a sfasamento minimo gli ingressi nascosti non esistono (se non esistono zeri) o sono evanescenti perchè man mano che il tempo passa tendono a zero.

16.2 Ricostruzione degli ingressi

Il problema è ricostruire $u(t)$ utilizzando un algoritmo che lavora su $y(t)$. Occhio a non fare confusione con la ricostruzione dello stato, son due cose completamente diverse. Chiamiamo $\hat{u}$ il nostro ingresso ricostruito. $y(t)$ lo conosciamo istante per istante, $Nu(t)$ non lo conosciamo. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} N\hat{u} &= Dy \\ Nu &= Dy \end{aligned}$$

perchè entrambe le $u, \hat{u}$ soddisfano lo stesso sistema, per differenza otteniamo

$$N(\hat{u} - u) = 0$$

quindi notiamo che qualsiasi $\hat{u}$ ricostruita sono diverse da quella vera, però la differenza tra l'ingresso ricostruito e l'ingresso vero è un ingresso nascosto per come l'abbiamo definito in precedenza. Quindi in conclusione abbiamo

$$u_{vero} = \hat{u} + u_{nasc}$$

Inoltre in un sistema a sfasamento minimo, nel quale $u_{nasc} = 0$ oppure $u_{nasc} \to 0$ avremo che con il passare del tempo $u_{vero} \to \hat{u}$ (perchè, siccome non abbiamo zeri o sono asintoticamente stabili, in $Nu = Dy$, $y = 0 \Leftrightarrow u = 0$ e quindi non possiamo avere ingressi nascosti).

16.3 Algoritmo di ricostruzione

L'ingresso può essere ricostruito *nei tempi discreti* solo con un ritardo di r intervalli di tempo elementari, e se non ci sono zeri nel sistema la ricostruzione è esatta dopo un ritardo pari all'ordine del sistema, $r =$ num poli $-$ num zeri.

17 Risposte canoniche del sistema

Le risposte canoniche del sistema le abbiamo quando abbiamo degli ingressi particolari detti anch'essi canonici, gli ingressi canonici sono:

- **Impulso**: è un segnale di tipo rettangolare che rimane alto per un $\delta t \to 0$. Molte volte l'impulso si scrive $\mathrm{imp}\, t$.
- **Scalino** (o gradino): si indica con $\mathrm{sca}\, t$. La derivata dello scalino è l'impulso.
- **Rampa**: si indica con $\mathrm{ramp}\, t$. La derivata della rampa è lo scalino.
- **Sinusoide**.

Le prime tre sono le risposte di un sistema che è inizialmente scarico ($x(0) = 0$). Essi sono molto importanti perchè:

1. Nella realtà abbiamo molte volte degli ingressi canonici.
2. Dalle risposte canoniche, che possono essere rilevate sperimentalmente, si possono ottenenere delle informazioni sugli zeri e sui poli del sistema.
3. Nota la risposta canonica si possono calcolare le risposte del sistema a ingressi non canonici.

Noi quando imponiamo un ingresso canonico non ci interessa l'ingresso precedente.

17.1 Risposta all'impulso

È molto importante avere inizialmente lo stato del sistema nullo $x(0) = 0$. Se $x(0) \neq 0$ la risposta del sistema *non* è la risposta all'impulso. La risposta all'impulso la chiameremo $g(t)$.

Fare un esempio (o due) di risposta all'impulso fisica diversa da quelle discusse a lezione (**tipica domanda d'esame**).

17.1.1 La formula di $g(\cdot)$

Queste formule si possono ottenere dalla formula di Lagrange:

$$g(t) = \begin{cases} c^T e^{At} b + d \,\mathrm{imp}(t) & \text{tempo continuo} \\ \begin{cases} d & \text{per } t = 0 \\ c^T A^{t-1} b & \text{per } t \geq 1 \end{cases} & \text{tempo discreto} \end{cases}$$

La dimostrazione è sulle dispense.

17.2 Integrale di convoluzione

Lo stato iniziale è ancora nullo $x(0) = 0$. Ora invece di immettere un ingresso canonico ne mettiamo uno qualsiasi abbiamo che

$$\begin{aligned}
y(t) &= c^T x(t) + du(t) \\
&= c^T \left[\cancelto{0}{e^{At} x(0)} + \int_0^t e^{A(t-\xi)} bu(\xi)\, d(\xi) \right] + du(t) \\
&= \int_0^t \left[\underbrace{c^T e^{A(t-\xi)} b}_{g(t-\xi)-\mathrm{dimp}(t-\xi)} \right] u(\xi)\, d\xi + du(t) \\
&= \int_0^t \left[g(t-\xi) - \mathrm{dimp}(t-\xi) \right] u(\xi)\, d\xi + du(t) \\
&= \int_0^t g(t-\xi)\, u(\xi)\, d\xi - \cancel{\int_t^t \mathrm{dimp}(t-\xi)\, u(\xi)\, d\xi} + \cancel{du(t)} \\
y(t) &= \int_0^t g(t-\xi)\, u(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

Questo si chiama integrale di convoluzione ossia l'uscita del sistema equivale all'integrale del prodotto tra la risposta all'impulso per l'ingresso.

17.3 Trasformata di Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

È una trasformazione lineare da funzioni reali con variabili reali a funzioni complesse con variabili complesse.

Alcuni esempi di trasformate di Laplace:

- $f(t) = \mathrm{imp}t \rightarrow F(s) = 1$.
- $f(t) = \mathrm{sca}t \rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$.
- $f(t) = \mathrm{ramp}t \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$.
- $f(t) = e^{at} \cdot \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \rightarrow F(s) = \frac{1}{(s-a)^k}$.

Alcune proprietà della trasformata:

- $L\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$. Intregrare significa dividere per s.
- $L\left[\frac{df(\cdot)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$. Derivare significa moltiplicare per s.
- $L[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s)$. Ritardare significa moltiplicare per $e^{-\tau s}$.
- $L\left[\int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right] = F(s)\, G(s)$. La convoluzione è il prodotto tra le due funzioni.

17.4 Trasformata Zeta

Data una funzione reale di variabile intera

$$f(\cdot) = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

la sua trasformata zeta è una funzione complessa di variabile complessa definita in questo modo

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

Alcuni esempi di trasformate zeta:

- $f(t) = \mathrm{imp}t \to F(z) = 1$.
- $f(t) = \mathrm{sca}t \to F(z) = \frac{z}{z-1}$.
- $f(t) = \mathrm{ramp}t \to \frac{z}{(z-1)^2}$.
- $f(t) = e^{at} \to F(z) = \frac{z}{z-a}$.

La funzione $f(\cdot)$ ritardata di un passo sarà definita come

$$f^{-}(\cdot) = \{0, f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

quindi alcune proprietà sono:

- $f^{+}(\cdot) = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$ è la funzione anticipata di un passo.
- $zf^{+}(\cdot) = zF(z) - zf(0)$ per anticipare quindi basta moltiplicare per z.

17.5 Risposta all'impulso, funzione di Trasferimento

Ora possiamo capire che l'operatore p era la trasformata di Laplace $G(s) = L[g(t)]$ nel tempo continuo e la trasformata Zeta nel tempo discreto $G(z) = Z[g(t)]$.

La **funzione di trasferimento** sappiamo per Souriau che

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + d$$

Facciamo un esempio di trasformazione:

$$\begin{aligned} L[g(t)] &= L\left[c^T e^{At} b + d\mathrm{imp}t\right] \\ &= c^T L\left[e^{At}\right] b + d \\ &= c^T (sI - A)^{-1} b + d \end{aligned}$$

questo perchè avevamo detto che $L[\mathrm{imp}t] = 1$ e $L\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1}$.

La trasformata dell'uscita è il prodotto della funzione di trasferimento per la trasformata dell'ingresso (le trasformate solitamente si scrivono in maiuscolo). Quindi la funzione di trasferimento $g(\cdot)$:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} g(\cdot) \\ x(0) = 0 \end{array}} \longrightarrow y(t) = \int_0^t g(t-\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

si trasforma in:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

Ricorda però che in questi casi l'uscita è quella forzata ossia abbiamo che $x(0) = 0$.

17.6 Poli e zeri reali:

- **Zeri superiori:** sono gli zeri più a destra del polo dominante sul piano di Gauss.
- **Zeri inferiori:** sono gli zeri più a sinistra del polo minore.
- **Zeri ben inquadrati:** hanno un numero identico di zeri sia alla sua destra che alla sua sinistra rispetto all'intervallo creato dai poli che lo circonda.
- **Zeri mal inquadrati:** il numero di zeri alla sua sinistra è diverso alla sua destra rispetto all'intervallo creato dai poli che lo circonda.

Quindi definiamo anche:

- $m_s =$ numero di zeri superiori.
- $\delta =$ numero zeri mal inquadrati.
- $N =$ numero estremi (massimi e minimi) nella risposta allo scalino.

abbiamo che

$$m_s \leq N \leq m_s + \delta$$

N è dispari (pari) se m_s è dispari (pari).

Ricordiamo che tutto questo vale solo se tutti i poli sono reali.

18 Regime periodico

Il regime periodico non significa necessariamente regime sinusoidale.

Il sistema ha uno e un solo **regime periodico** se e solo se $\forall j$:

$$\lambda_j \neq \begin{cases} i\frac{2k\pi}{T} & \text{tempo continuo} \\ e^{i\frac{2k\pi}{T}} & \text{tempo discreto} \end{cases} \tag{6}$$

in altre parole se e solo se i suoi autovalori hanno parte reale non nulla. Se l'ingresso periodico e lo stato iniziale è generico, non è detto che noi siamo "nella soluzione" in regime periodico. Ma il sistema se è asintoticamente stabile, tenderà ad andare in regime periodico dopo $5\tau_{dominante}$.

Alcune osservazioni:

- Se il sistema è iperbolico, ossia non ha autovalori con parte reale nulla nel caso a tempo continuo e con modulo unitario nel caso a tempo discreto, la (6) è verificata.
- La (6) è certamente verificata se il sistema è asintoticamente stabile.

18.1 Serie di Fourier

$$u_T(t) = c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)$$

con

- $\frac{2\pi}{T} =$ pulsazione fondamentale.
- $k = 1 \Rightarrow$ armonica fondamentare (o prima armonica).
- $c = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_T(\xi)\, d\xi$
- $a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_T(\xi) \sin\left(k\frac{2\pi}{T}\xi\right) d\xi$
- $b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u_T(\xi) \cos\left(k\frac{2\pi}{T}\xi\right) d\xi$

18.2 Risposta in frequenza

Da un sistema completamente raggiungibile e osservabile $\left(A, b, c^T, d\right)$ con modello ARMA:

$$\Delta_A(s)\, y(t) = N(s)\, u(t)$$

a ogni ingresso sinusoidale

$$u_T(t) = U \sin(\omega t)$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$, corrisponde un'unica uscita sinusoidale

$$y_T(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$$

se e solo se $\Delta_A(i\omega) \neq 0$. Inoltre, in tal caso

$$Y = R(\omega)\, U \quad \varphi = \varphi(\omega)$$

ossia se raddoppiamo l'ingresso, l'uscita è il doppio, sono legati linearmente e lo sfasamento φ dipende da ω. $R \geq 0$ si chiama **risposta in frequenza** o **guadagno**, mentre $\varphi < 0$ significa **ritardo**.

18.3 Teorema della risposta in frequenza

Dato un sistema completamente raggiungibile e osservabile in regime periodico

$$(U, \omega) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow (Y, \omega, \varphi)$$

nota la funzione di trasferimento abbiamo che

$$R(\omega) = |G(i\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg G(i\omega)$$

cioè $G(i\omega) = R(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$. Ricordiamo che $\arg(a + ib) = \arctan \frac{b}{a}$ e $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

18.3.1 Decibel

La risposta in frequenza R si può esprimere in dB (deciBel)

$$R_{dB} = 20 \log_{10} R$$

Siccome è in scala logaritmica moltiplicare (dividere) per 10 significa aggiungere (togliere) $20\,\mathrm{dB}$:

$$R = R_1 R_2 \Rightarrow R_{dB} = (R_1)_{dB} + (R_2)_{dB}$$

19 Diagrammi Polari

La rapresentazione della funzione di trasferimento è:

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|\, e^{i(\arg G(i\omega))} = R(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$$

in questo modo posso rappresentare sia il modulo che lo sfasamento in un unico diagramma. Ma faremo ben poco a lezione sui diagrammi polari.

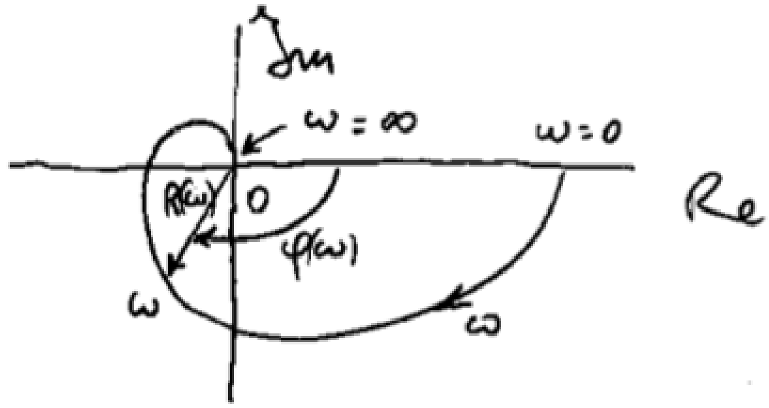


Figura 5: Esempio di Diagramma Polare

19.1 Nyquist

19.1.1 Diagramma di Nyquist

Abbiamo una funzione di trasferimento $G(s)$ con $0 \leq \omega \leq \infty$ il diagramma di Nyquist è il diagramma polare della funzione di trasferimento più il suo ribaltato, ossia aggiungiamo al diagramma polare anche la funzione $G(-i\omega) = \overline{G}(i\omega)$, disegnamo quindi il suo coniugato.

19.1.2 Regola di Nyquist

Abbiamo un sistema retrazionato

$$F = \frac{G}{1+GH}$$

la regola di Nyquist dice che

$$P_F^+ = P_{GH}^+ - \overleftarrow{N_{GH/-1}}$$

con:

- P_F^+: num poli instabili ad anello chiuso;
- P_{GH}^+: num di poli instabili ad anello aperto;
- $\overleftarrow{N_{GH/-1}}$: num di giri in senso antiorario intorno al punto -1;

Il numero di poli positivi di F (quelli instabili) è uguale alla differenza tra il numero di poli positivi della funzione di trasferimento dell'anello aperto (P_{GH}^+) e il numero di giri del vettore GH intorno al punto -1 reale lungo il diagramma di Nyquist . Se l'anello aperto è stabile significa che $P_{GH}^+ = 0$.

19.1.3 Criterio di stabilità di Nyquist

Il sistema ad anello chiuso è esternamente stabile se e solo se

$$\overleftarrow{N_{GH/-1}} = P_{GH}^+$$

In parole l'aggregato è esternamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento d'anello $G(s)H(s)$ non passa per il punto ($-1 + i0$) del piano complesso e il numero di giri che compie attorno a tale punto (contati positivamente in senso antiorario) coincide con il numero di poli di $G(s)H(s)$ che hanno parte reale positiva.

20 Margine di Fase e Guadagno

Il margine di guadagno si calcola

$$k_m = \frac{\mu_{crit}}{\mu}$$

La pulsazione di taglio è il valore di pulsazione alla quale si taglia il diagramma di Bode a $0\ \mathrm{dB}$, si chiama (ω_c, Omega Cut). Invece il margine di fase si calcola

$$\varphi_m = 180° + \frac{180}{\pi} \arg GH\left(i\omega_c\right)$$