Serie di Fourier

motivazioni, costruzione

applicazioni

circa 4 ore lezione

Motivazioni

Problema: Scrivere una funzione come sviluppo in serie quando

- f non è regolare (per fare lo sviluppo in serie di Taylor abbiamo bisogno che la funzione sia derivabile infinite volte).

Motivazioni

Problema: Scrivere una funzione come sviluppo in serie quando

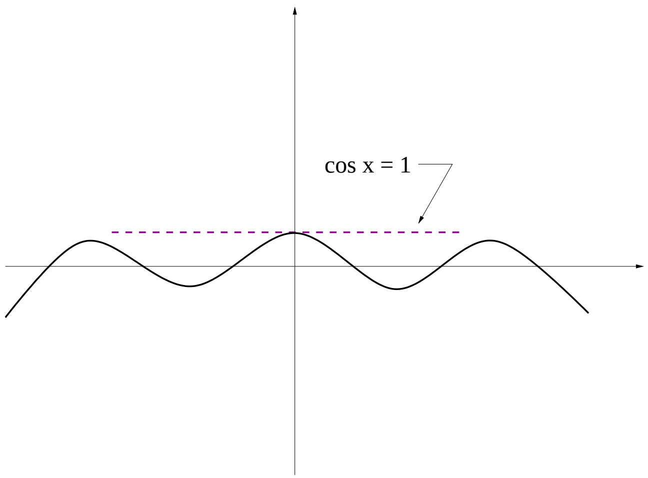
- f non è regolare (per fare lo sviluppo in serie di Taylor abbiamo bisogno che la funzione sia derivabile infinite volte).
- f è periodica (ovvero esiste $T > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $f(x+T) = f(x)$)

Esempio

Vediamo con un disegno dell'approssimazione della funzione $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4!} + \cdots$in serie di Taylor.

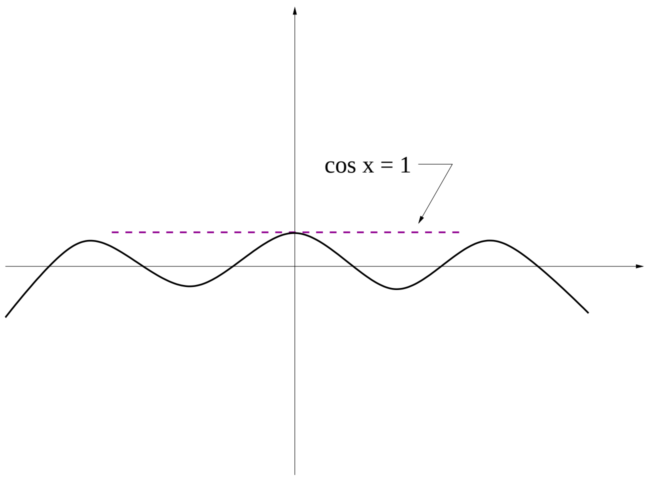
Esempio

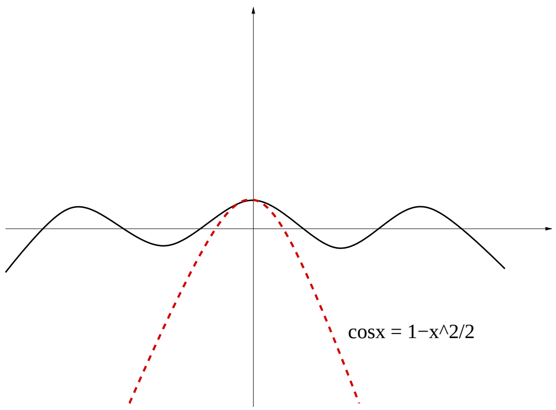
Vediamo con un disegno dell'approssimazione della funzione $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4!} + \cdots$ in serie di Taylor.

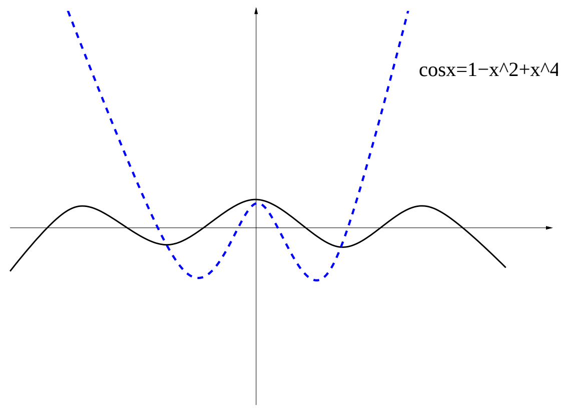


Esempio

Vediamo con un disegno dell'approssimazione della funzione $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4!} + \cdots$in serie di Taylor.







Osservazione: Le funzioni $\sin nx, \ \cos nx$ sono 2π-periodiche (per ogni $n \in \mathbf{N}$), pertanto per ogni $a, \ b \in \mathbf{R}$ la funzione

Osservazione: Le funzioni $\sin nx, \; \cos nx$ sono 2π-periodiche (per ogni $n \in \mathbf{N}$), pertanto per ogni $a, \; b \in \mathbf{R}$ la funzione

$$a \cos nx + b \sin nx$$

Osservazione: Le funzioni $\sin nx,\ \cos nx$ sono 2π-periodiche (per ogni $n \in \mathbf{N}$), pertanto per ogni $a,\ b \in \mathbf{R}$ la funzione

$$a \cos nx + b \sin nx$$

sarà 2π-periodica, quindi anche la funzione

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

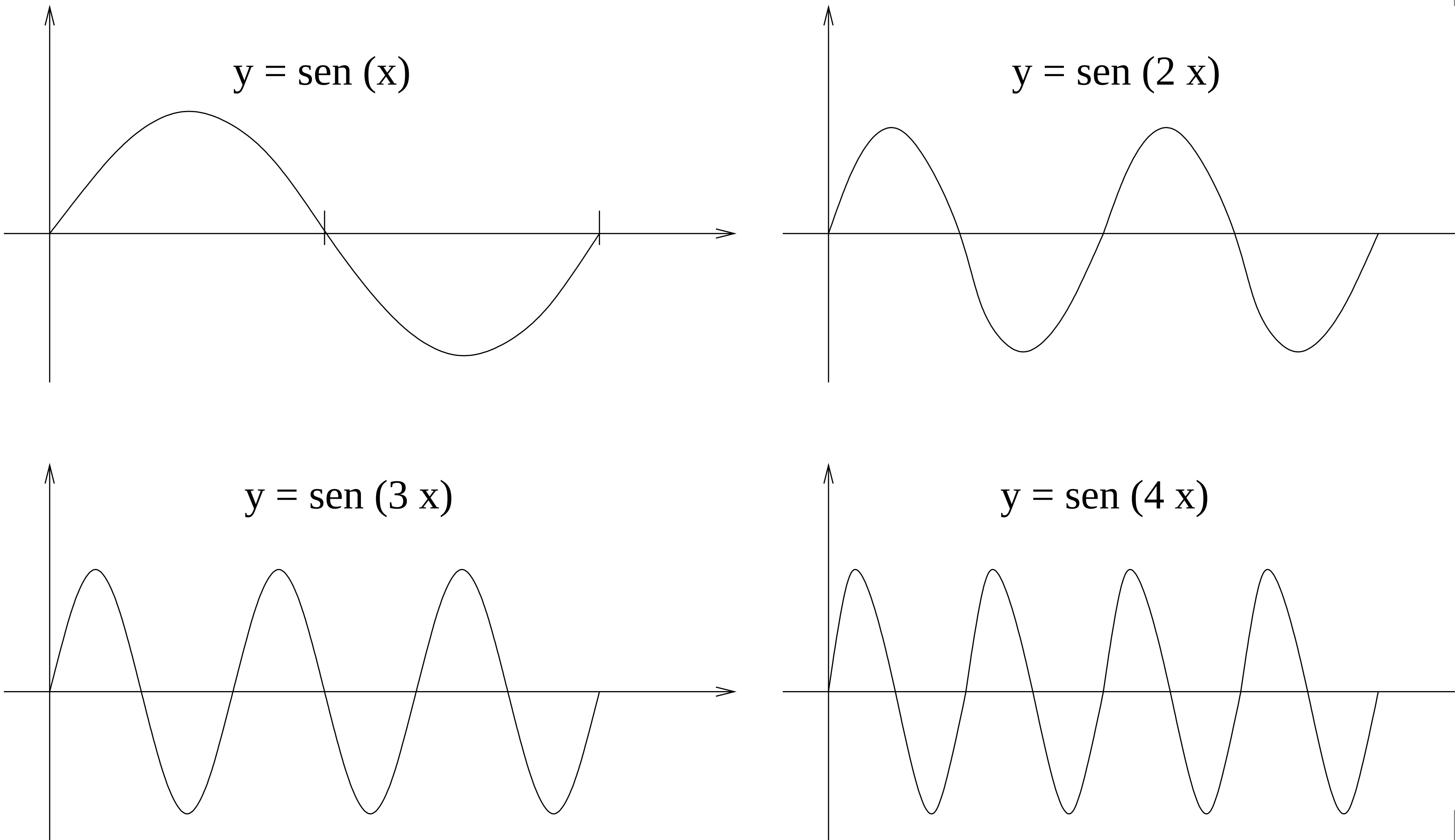
Osservazione: Le funzioni $\sin nx, \ \cos nx$ sono 2π-periodiche (per ogni $n \in \mathbf{N}$), pertanto per ogni $a, \ b \in \mathbf{R}$ la funzione

$$a \cos nx + b \sin nx$$

sarà 2π-periodica, quindi anche la funzione

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

è 2π-periodica.


y = sen (x)
y = sen (2 x)
y = sen (3 x)
y = sen (4 x)

Il nostro scopo è dunque quello di cercare di scrivere una funzione generale f utilizzando le funzioni periodiche seno e coseno come elementi di una “base dello spazio di funzioni" come abbiamo utilizzato i polinomi come elementi di “base" per scrivere una funzione generica C^ω attraverso la serie di Taylor.

Ricordo-Premessa serie di Fourier

Dovete ricordare che

Ricordo-Premessa serie di Fourier

Dovete ricordare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad & se \quad m \neq n \\ \\ \pi \quad & se \quad m = n \end{cases}$$

Ricordo-Premessa serie di Fourier

Dovete ricordare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad se \quad m \neq n \\ \\ \pi \quad se \quad m = n \end{cases}$$

e analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = \begin{cases} 0 \quad se \quad m \neq n \\ \\ \pi \quad se \quad m = n \neq 0 \end{cases}$$

Ricordo-Premessa serie di Fourier

Dovete ricordare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \; dx = \begin{cases} 0 & se \quad m \neq n \\ \\ \pi & se \quad m = n \end{cases}$$

e analogamente

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = \begin{cases} 0 & se \qquad m \neq n \\ \\ \pi & se \quad m = n \neq 0 \end{cases}$$

Inoltre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \; dx = 0, \quad \forall n, \; m$$

Coefficienti di Fourier

Consideriamo dunque

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Coefficienti di Fourier

Consideriamo dunque

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Supponiamo che

$$s_N(x) \longrightarrow f(x)$$

Coefficienti di Fourier

Consideriamo dunque

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Supponiamo che

$$s_N(x) \longrightarrow f(x)$$

ovvero che la somma della serie sia una funzione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Legame tra f e $a_n, \ b_n$

Moltiplicando la f per $\cos mx$ (con $m = 0, 1, \ldots$) e supponendo che si possa integrare termine a termine su di un periodo (per esempio quest' è possibile se c'è convergenza uniforme su un periodo) $[0, 2\pi]$, otteniamo

Legame tra f e $a_n, \ b_n$

Moltiplicando la f per $\cos mx$ (con $m = 0, 1, \ldots$) e supponendo che si possa integrare termine a termine su di un periodo (per esempio quest' è possibile se c'è convergenza uniforme su un periodo) $[0, 2\pi]$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \ dx$$

Legame tra f e $a_n,\ b_n$

Moltiplicando la f per $\cos mx$ (con $m = 0, 1, \ldots$) e supponendo che si possa integrare termine a termine su di un periodo (per esempio quest' è possibile se c'è convergenza uniforme su un periodo) $[0, 2\pi]$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \; dx$$

$$+ \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \; dx$$

Legame tra f e $a_n,\ b_n$

Moltiplicando la f per $\cos mx$ (con $m = 0, 1, \ldots$) e supponendo che si possa integrare termine a termine su di un periodo (per esempio quest' è possibile se c'è convergenza uniforme su un periodo) $[0, 2\pi]$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \; dx$$

$$+\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \; dx$$

Tenendo conto delle relazioni precedentemente ricordate si ha che

Legame tra f e $a_n,\ b_n$

Moltiplicando la f per $\cos mx$ (con $m = 0, 1, \ldots$) e supponendo che si possa integrare termine a termine su di un periodo (per esempio quest' è possibile se c'è convergenza uniforme su un periodo) $[0, 2\pi]$, otteniamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \ dx$$

$$+\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \ dx$$

Tenendo conto delle relazioni precedentemente ricordate si ha che

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx, \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

ed in modo analogo moltiplicando per $\sin mx$

ed in modo analogo moltiplicando per $\sin mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx \, dx$$

ed in modo analogo moltiplicando per $\sin mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx \; dx$$

$$+\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) \; dx$$

e quindi

ed in modo analogo moltiplicando per $\sin mx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin mx \; dx$$

$$+\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) \; dx$$

e quindi

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx, \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots$$

Abbiamo che, data una $f \in \mathcal{R}((-\pi, \pi))$ e 2π-periodica, Abbiamo che, data una $f \in \mathcal{R}((-\pi, \pi))$ e 2π-periodica, i coefficienti a_n e b_n definiti prima, si chiamano coefficienti di Fourier associati a f e l'espressione

Abbiamo che, data una $f \in \mathcal{R}((-\pi, \pi))$ e 2π-periodica, i coefficienti a_n e b_n definiti prima, si chiamano coefficienti di Fourier associati a f e l'espressione

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Abbiamo che, data una $f \in \mathcal{R}((-\pi,\pi))$ e 2π-periodica, i coefficienti a_n e b_n definiti prima, si chiamano coefficienti di Fourier associati a f e l'espressione

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

si chiama serie di Fourier associata ad f.

N.B.

1. Per poter scrivere i coefficienti a_n con la stessa formula $\forall\, n \in \mathbf{N}$ (e quindi anche nel caso in cui $n = 0$) definiamo

N.B.

1. Per poter scrivere i coefficienti a_n con la stessa formula $\forall\, n \in \mathbf{N}$ (e quindi anche nel caso in cui $n = 0$) definiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; dx$$

N.B.

1. Per poter scrivere i coefficienti a_n con la stessa formula $\forall\, n \in \mathbf{N}$ (e quindi anche nel caso in cui $n = 0$) definiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Invece si avrebbe (caso $n = m = 0$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \; 2\pi a_0$$

N.B.

1. Per poter scrivere i coefficienti a_n con la stessa formula $\forall\, n \in \mathbf{N}$ (e quindi anche nel caso in cui $n = 0$) definiamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Invece si avrebbe (caso $n = m = 0$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \; 2\pi a_0$$

e quindi facciamo iniziare la serie di Fourier con il termine $\dfrac{a_0}{2}$.

2. Ricordiamo che una funzione è detta pari se e solo se $f(x) = f(-x)$; mentre è detta dispari se e solo se $f(x) = -f(-x)$.

2. Ricordiamo che una funzione è detta pari se e solo se $f(x) = f(-x)$; mentre è detta dispari se e solo se $f(x) = -f(-x)$.

3. Ogni funzione $f(x)$ può essere scritta come somma di una funzione pari e di una funzione dispari secondo la formula

2. Ricordiamo che una funzione è detta pari se e solo se $f(x) = f(-x)$; mentre è detta dispari se e solo se $f(x) = -f(-x)$.

3. Ogni funzione $f(x)$ può essere scritta come somma di una funzione pari e di una funzione dispari secondo la formula

$$\boxed{f(x) = f_e(x) + f_o(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}}$$

2. Ricordiamo che una funzione è detta pari se e solo se $f(x) = f(-x)$; mentre è detta dispari se e solo se $f(x) = -f(-x)$.

3. Ogni funzione $f(x)$ può essere scritta come somma di una funzione pari e di una funzione dispari secondo la formula

$$\boxed{f(x) = f_e(x) + f_o(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}}$$

Esempio: $\boxed{e^x = \cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

4. In due casi il calcolo dei coefficienti di Fourier si semplifica:

- se $f(x)$ è una funzione pari, allora nel suo svilippo in serie di Fourier devono comparire solo termini pari e quindi $b_n = 0,\ \forall n \geq 1$.

4. In due casi il calcolo dei coefficienti di Fourier si semplifica:

- se $f(x)$ è una funzione pari, allora nel suo svilippo in serie di Fourier devono comparire solo termini pari e quindi $b_n = 0,\ \forall n \geq 1$.
- se $f(x)$ è una funzione dispari, allora nel suo svilippo in serie di Fourier devono comparire solo termini dispari e quindi $a_n = 0,\ \forall n \geq 0$.

5. la serie di Fourier associata ad una funzione $f(x)$ si può esprimere usando una notazione complessa come:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \ \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$$

5. la serie di Fourier associata ad una funzione $f(x)$ si può esprimere usando una notazione complessa come:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \; \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) \, dx$$

dove si passa dalla forma reale a quella complessa ponendo $\gamma_0 = a_0/2$ e

5. la serie di Fourier associata ad una funzione $f(x)$ si può esprimere usando una notazione complessa come:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \; \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$$

dove si passa dalla forma reale a quella complessa ponendo $\gamma_0 = a_0/2$ e

$$\gamma_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \;\text{ e }\; \gamma_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

5. la serie di Fourier associata ad una funzione $f(x)$ si può esprimere usando una notazione complessa come:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \;\; \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) \, dx$$

dove si passa dalla forma reale a quella complessa ponendo $\gamma_0 = a_0/2$ e

$$\gamma_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \;\; \text{e} \;\; \gamma_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$a_n = \gamma_n + \gamma_{-n} \;\; \text{e} \;\; b_n = i(\gamma_n - \gamma_{-n})$$

e ricordando la formula di Eulero

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

si ottiene la formula finale

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \ \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$$

Definizione

Il termine generale della serie

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

si chiama la n-esima armonica .

Definizione

Il termine generale della serie

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

si chiama la n-esima armonica .

La sua frequenza è $\dfrac{n}{2\pi}$ e si dice che la serie di Fourier è lo sviluppo di $f(t)$ in serie di armoniche elementari.

Problema

Data una $f \in \mathcal{R}((-\pi, \pi))$ e 2π-periodica, quando è che la serie di Fourier associata ad f (ovvero costruita tramite i coefficienti di Fourier di f)

converge e

converge proprio ad f?

Convergenza della serie di Fourier

Condizione sufficiente affinchè una serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Convergenza della serie di Fourier

Condizione sufficiente affinchè una serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converga è che siano convergenti le serie numeriche

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} |a_n| \qquad \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} |b_n|$$

Convergenza della serie di Fourier

Condizione sufficiente affinchè una serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converga è che siano convergenti le serie numeriche

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} |a_n| \qquad \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} |b_n|$$

Infatti abbiamo

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

e quindi se convergono assolutamente le due serie numeriche dei coefficienti, la serie di Fourier converge assolutamente per il criterio di confronto.

Notazione.

Indichiamo

- il limite destro nel punto x_0 con

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Notazione.

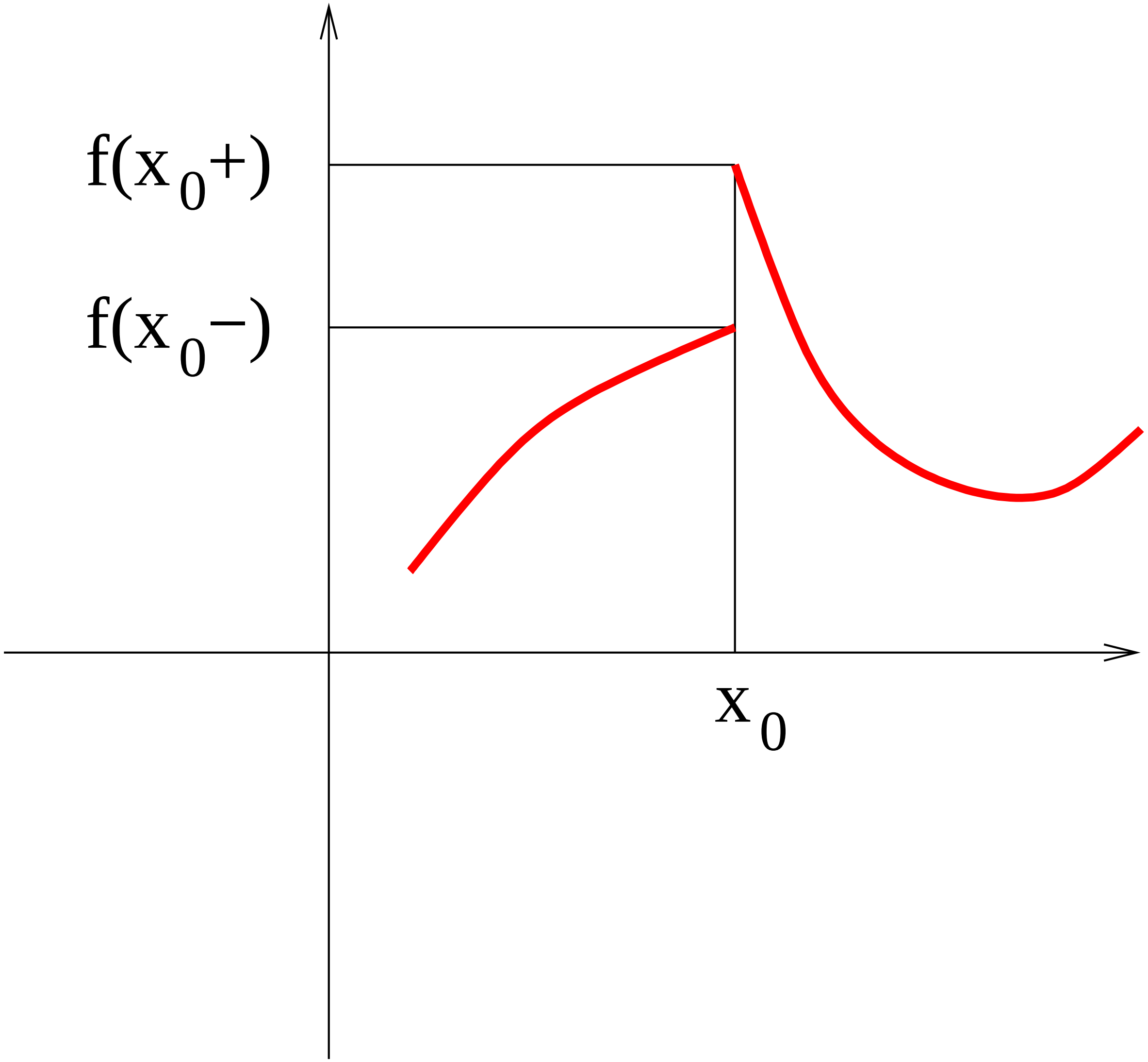
Indichiamo

- il limite destro nel punto x_0 con

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- il limite di sinistra nel punto x_0 con

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$



f(x 0+)
f(x 0−)
x 0

Definizione: f è detta **regolare a tratti** su $[a, b]$

Definizione: f è detta **regolare a tratti** su $[a, b]$

$$\Longleftrightarrow$$

Definizione: f è detta regolare a tratti su $[a, b]$

$$\Leftrightarrow$$

$\exists$ un numero finito di punti $x_0, \ldots, x_N$ con

Definizione: f è detta **regolare a tratti** su $[a,b]$

$$\Leftrightarrow$$

$\exists$ un numero finito di punti $x_0, \ldots, x_N$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

Definizione: f è detta regolare a tratti su $[a,b]$

$$\Leftrightarrow$$

$\exists$ un numero finito di punti $x_0, \dots, x_N$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

tali che $f \in C^1([x_{i-1}, x_i])$.

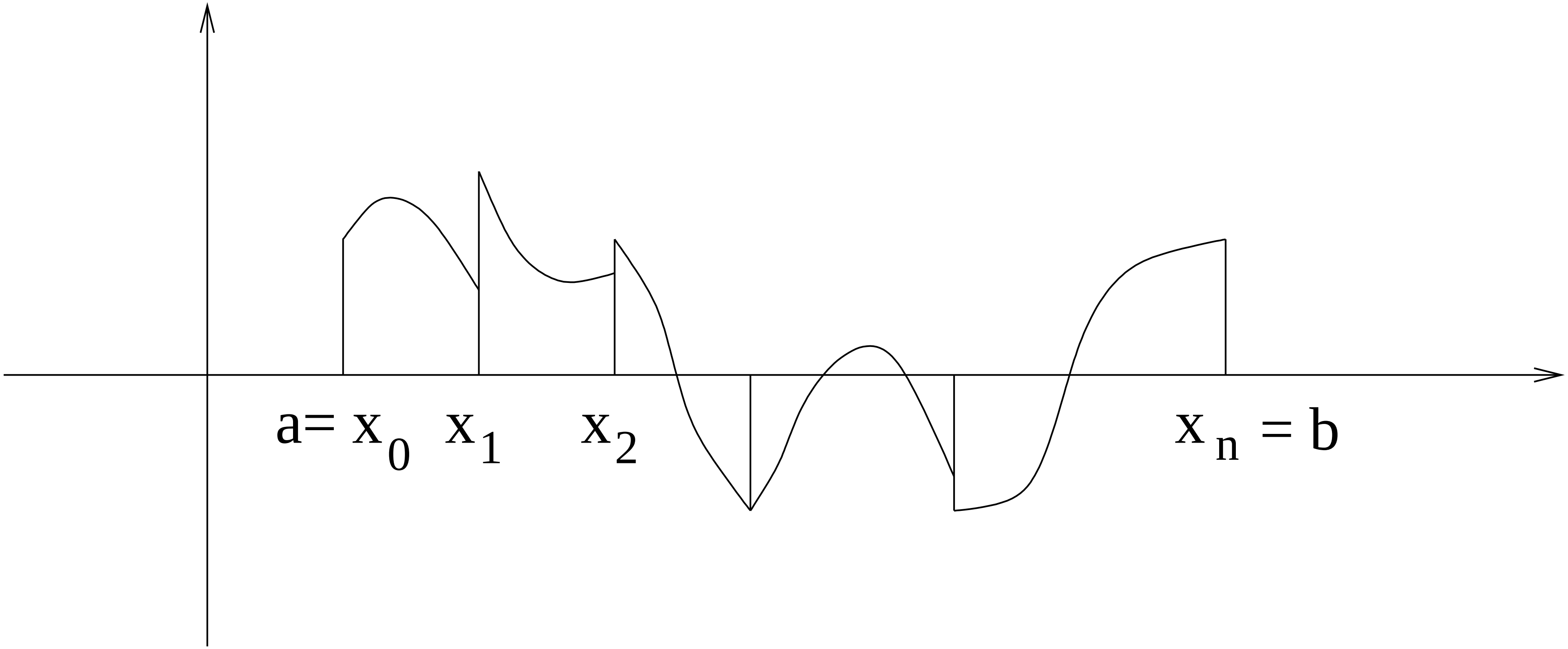
Definizione: f è detta **regolare a tratti** su $[a, b]$

$$\Leftrightarrow$$

$\exists$ un numero finito di punti $x_0, \ldots, x_N$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

tali che $f \in C^1([x_{i-1}, x_i])$.
f si dice che è regolare a tratti su $\mathbf{R}$ se lo è su ogni compatto in $\mathbf{R}$.


a= x0
x1
x2
xn = b

N.B. $f \in C^1([x_{i-1}, x_i])$ vuol dire

- $f \in C^1((x_{i-1}, x_i))$

N.B. $f \in C^1([x_{i-1}, x_i])$ vuol dire

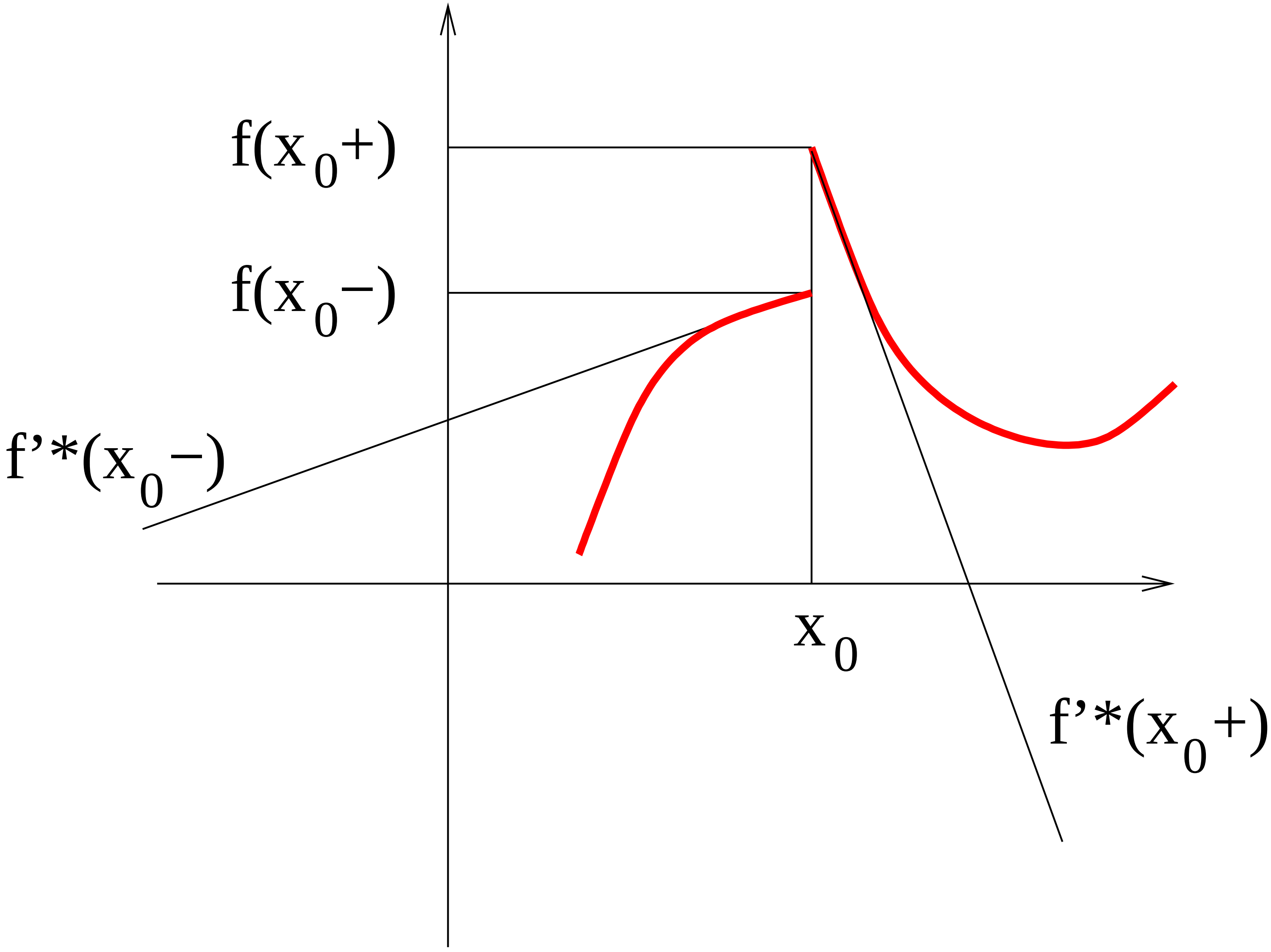
- $f \in C^1((x_{i-1}, x_i))$
- esistono e sono finiti $f(x_{i-1}^+)$, $f(x_i^-)$

N.B. $f \in C^1([x_{i-1}, x_i])$ vuol dire

- $f \in C^1((x_{i-1}, x_i))$
- esistono e sono finiti $f(x_{i-1}^+)$, $f(x_i^-)$
- esistono e sono finiti

$$f'^{*}_{+}(x_{i-1}) = \lim_{x \to x_{i-1}} \frac{f(x) - f(x_{i-1}^+)}{x - x_{i-1}},$$

$$f'^{*}_{-}(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i^-)}{x - x_i}$$


f(x 0+)
f(x 0−)
f'*(x 0−)
x 0
f'*(x 0+)

Teoremi di convergenza

Teorema: (convergenza puntuale delle serie di Fourier) Sia f una funzione

- 2π-periodica,

Teoremi di convergenza

Teorema: (convergenza puntuale delle serie di Fourier) Sia f una funzione

- 2π-periodica,
- regolare a tratti in $\mathbf{R}$ (C^1).

Teoremi di convergenza

Teorema: (convergenza puntuale delle serie di Fourier) Sia f una funzione

- 2π-periodica,
- regolare a tratti in $\mathbf{R}$ (C^1).

Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

Teoremi di convergenza

Teorema: (convergenza puntuale delle serie di Fourier) Sia f una funzione

- 2π-periodica,
- regolare a tratti in $\mathbf{R}$ (C^1).

Allora per ogni $x \in \mathbf{R}$ la serie di Fourier converge a

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

In particolare la serie converge a $f(x)$ in ogni punto in cui f è continua.

N.B.

- NON basta la continuità della f per avere la convergenza della serie di Fourier (1876 du Bois-Raymond)

N.B.

- NON basta la continuità della f per avere la convergenza della serie di Fourier (1876 du Bois-Raymond)
- Siccome i coefficienti sono definiti tramite un integrale, tali coefficienti non cambiano cambiando la f in punti isolati, ovvero il comportamento della serie dipende dal comportamento locale della f e non da quello puntuale.

Condizione (D)

Ogni tanto si sente citare per ipotesi sulla convergenza delle serie di Fourier di una condizione (D) in un punto x_0 che dice semplicemente

- f è derivabile in x_0 oppure

Condizione (D)

Ogni tanto si sente citare per ipotesi sulla convergenza delle serie di Fourier di una condizione (D) in un punto x_0 che dice semplicemente

- f è derivabile in x_0 oppure
- f è continua in x_0 ed esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ oppure

Condizione (D)

Ogni tanto si sente citare per ipotesi sulla convergenza delle serie di Fourier di una condizione (D) in un punto x_0 che dice semplicemente

- f è derivabile in x_0 oppure
- f è continua in x_0 ed esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ oppure
- f è discontinua in x_0 ed esistono $f'^*_+(x_0)$ e $f'^*_-(x_0)$

Esempio

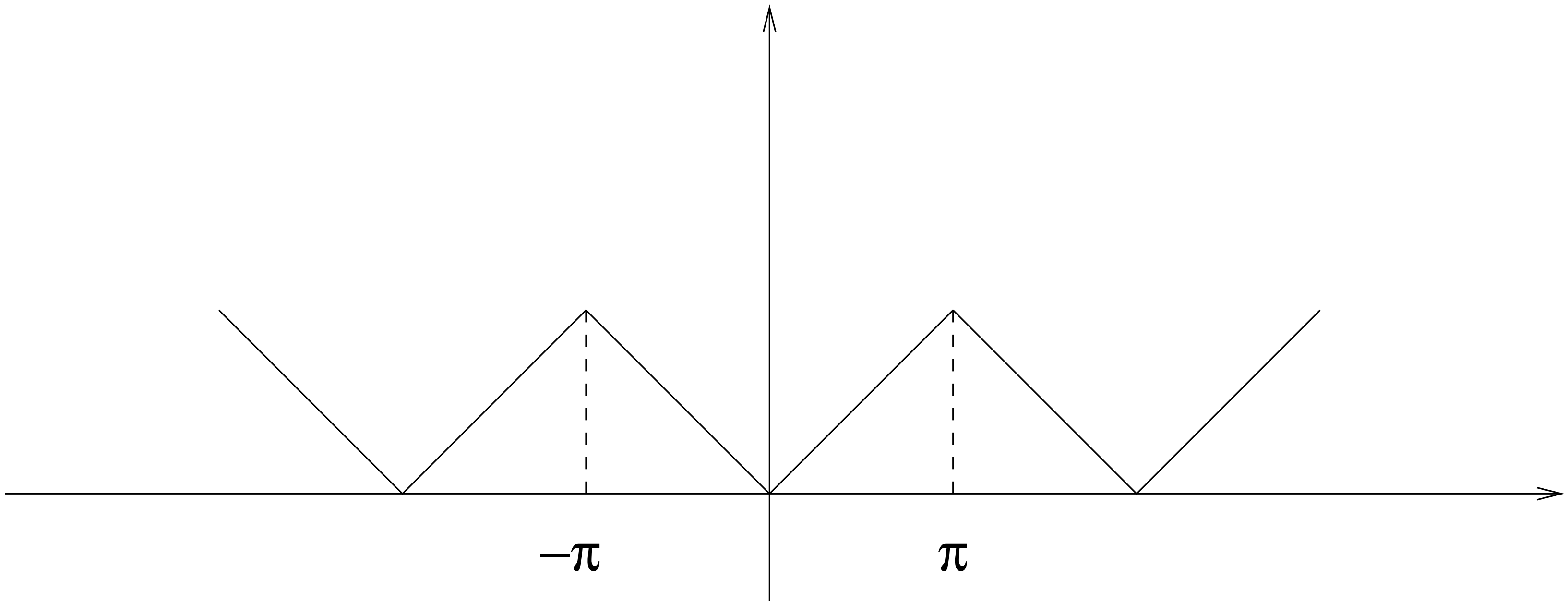
Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica definita su $[-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = |x|$$

Esempio

Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica definita su $[-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = |x|$$



Siccome $f(x) = f(-x)$ (f pari) abbiamo $b_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}$

Siccome $f(x) = f(-x)$ (f pari) abbiamo $b_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}$
Se fosse $f(x) = -f(-x)$ (f dispari) avremmo $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$

Siccome $f(x) = f(-x)$ (f pari) abbiamo $b_n = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \; dx =$$

Siccome $f(x) = f(-x)$ (f pari) abbiamo $b_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -x \cos nx \ dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx \ dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} u\cos nu\ du + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} u\cos nu\ du + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} u\cos nu\ du + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \sin nx\ dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} u\cos nu \; du + \int_{0}^{\pi} x\cos nx \; dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx \; dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \sin nx \; dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(-\cos nx|_{0}^{\pi}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

La serie converge puntualmente $\forall x \in \mathbf{R}$, siccome converge anche totalmente per il Teorema di Weierstrass converge uniformemente.

Pertanto

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

La serie converge puntualmente $\forall x \in \mathbf{R}$, siccome converge anche totalmente per il Teorema di Weierstrass converge uniformemente.

Per $x = 0$ abbiamo

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Pertanto

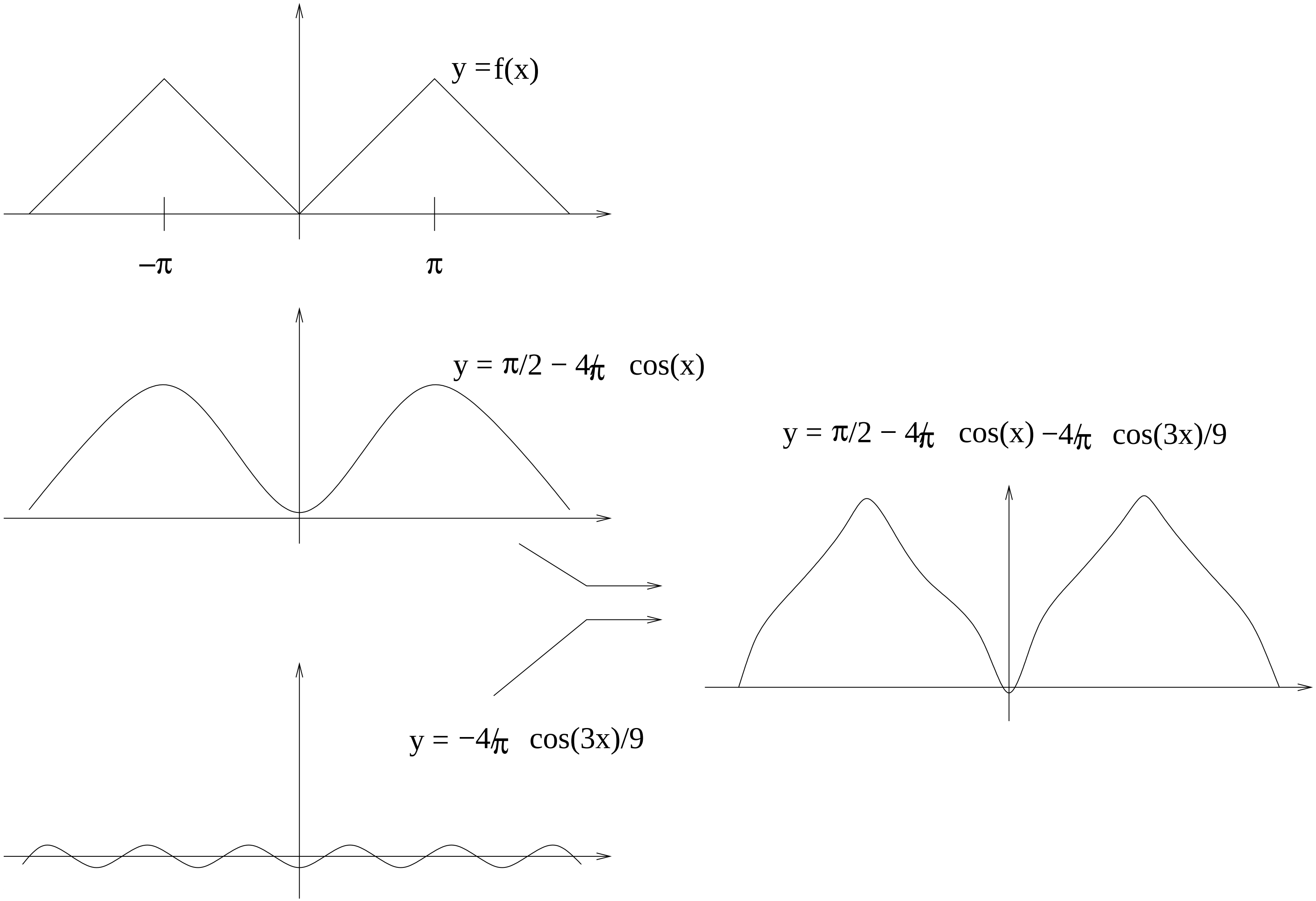
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

La serie converge puntualmente $\forall x \in \mathbf{R}$, siccome converge anche totalmente per il Teorema di Weierstrass converge uniformemente.
Per $x = 0$ abbiamo

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

ovvero

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$


y = f(x)
−π
π
y = π/2 − 4/π cos(x)
y = π/2 − 4/π cos(x) −4/π cos(3x)/9
y = −4/π cos(3x)/9

Teorema di convergenza uniforme

Sia f una funzione

- regolare a tratti su $\mathbf{R}$ e

Teorema di convergenza uniforme

Sia f una funzione

- regolare a tratti su $\mathbf{R}$ e
- 2π-periodica e

Teorema di convergenza uniforme

Sia f una funzione

- regolare a tratti su $\mathbf{R}$ e
- 2π-periodica e
- continua su $\mathbf{R}$.

Allora la serie di Fourier converge uniformemente ad f su $\mathbf{R}$.

Teorema di convergenza uniforme

Sia f una funzione

- regolare a tratti su $\mathbb{R}$ e
- 2π-periodica e
- continua su $\mathbb{R}$.

Allora la serie di Fourier converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.

Più in generale la convergenza è uniforme in ogni intervallo di continuità della f.

Esempio

Data la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq t \leq 0 \\ 4 & \text{se } 0 < t < \pi \end{cases}$$

determinare la serie di Fourier associata a f e discuterne la convergenza puntuale ed uniforme.

Esempio

Data la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq t \leq 0 \\ 4 & \text{se } 0 < t < \pi \end{cases}$$

determinare la serie di Fourier associata a f e discuterne la convergenza puntuale ed uniforme.
Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 4\, dt = 4,$$

Esempio

Data la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \le t \le 0 \\ 4 & \text{se } 0 < t < \pi \end{cases}$$

determinare la serie di Fourier associata a f e discuterne la convergenza puntuale ed uniforme.
Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\,dt = 4,$$

e, per $n \ge 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\cos nt\,dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} = 0$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 4\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n}(1-(-1)^n).$$

Notando che b_n è nullo per n pari ed utilizzando la sostituzione $k = 2n + 1$ si ha

Notando che b_n è nullo per n pari ed utilizzando la sostituzione $k = 2n + 1$ si ha

$$b_n = \frac{8}{\pi(2k+1)},$$

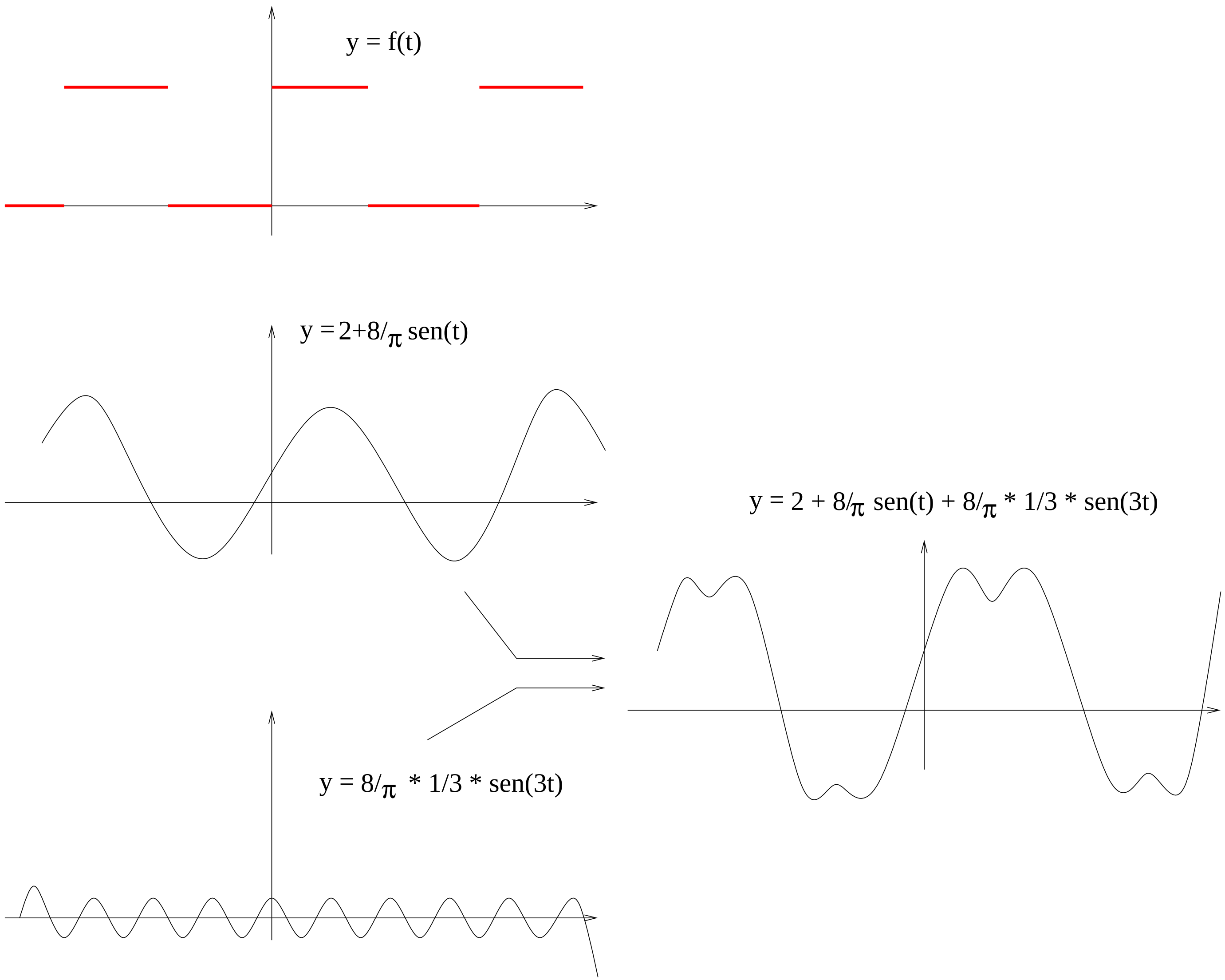
Notando che b_n è nullo per n pari ed utilizzando la sostituzione $k = 2n + 1$ si ha

$$b_n = \frac{8}{\pi(2k+1)},$$

e quindi la serie di Fourier associata ad f si scrive come

$$2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n} \sin nt =$$

$$2 + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)t.$$


y = f(t)
y = 2+8/π sen(t)
y = 2 + 8/π sen(t) + 8/π * 1/3 * sen(3t)
y = 8/π * 1/3 * sen(3t)

Utilizzando i noti teoremi, la serie converge puntualmente ad f per $t \neq h\pi$, con h intero, e converge uniformemente ad f su qualunque sottoinsieme chiuso di $\mathbf{R}$ che non contenga alcun punto del tipo $h\pi$.

Osservazione

Se avessimo una funzione periodica di periodo T allora si può fare lo sviluppo in serie di Fourier utilizzando le funzioni

Osservazione

Se avessimo una funzione periodica di periodo T allora si può fare lo sviluppo in serie di Fourier utilizzando le funzioni

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{T}y\right), \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{2\pi n}{T}y\right)$$

Osservazione

Se avessimo una funzione periodica di periodo T allora si può fare lo sviluppo in serie di Fourier utilizzando le funzioni

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{T}y\right), \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{2\pi n}{T}y\right)$$

che sono funzioni T-periodiche. In questo caso i coefficienti di Fourier saranno

Osservazione

Se avessimo una funzione periodica di periodo T allora si può fare lo sviluppo in serie di Fourier utilizzando le funzioni

$$\sin\left(\frac{2\pi n}{T}y\right), \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{2\pi n}{T}y\right)$$

che sono funzioni T-periodiche. In questo caso i coefficienti di Fourier saranno

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(y)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}y\right)\, dy,$$
$$\text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

e

e

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(y)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}y\right)\, dy,$$

per $n = 1, 2, \ldots$

e

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(y)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}y\right)\ dy,$$

per $n = 1, 2, \ldots$
si passa dalle vecchie formule alle nuove ponendo

$$x = \left(\frac{2\pi}{T}y\right)$$

Lemma

Sia f una funzione regolare a tratti su $\mathbf{R}$ e 2π-periodica. Allora tra tutti i polinomi trigonometrici

Lemma

Sia f una funzione regolare a tratti su $\mathbb{R}$ e 2π-periodica. Allora tra tutti i polinomi trigonometrici

$$\sigma_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

Lemma

Sia f una funzione regolare a tratti su $\mathbf{R}$ e 2π-periodica. Allora tra tutti i polinomi trigonometrici

$$\sigma_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

i polinomi di Fourier (cioè con i coefficienti eguali ai coefficienti di Fourier) sono quelli che minimizzano lo scarto quadratico medio.

Lemma

Sia f una funzione regolare a tratti su $\mathbf{R}$ e 2π-periodica.
Allora tra tutti i polinomi trigonometrici

$$\sigma_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

i polinomi di Fourier (cioè con i coefficienti eguali ai coefficienti di Fourier) sono quelli che minimizzano lo scarto quadratico medio.
Ovvero

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_N(x)|^2 \, dx$$

è minimo se $\sigma_N = s_N$.

È possibile costruire uno spazio di funzioni per cui in tale spazio si può dimostrare che la serie di Fourier converge in media quadratica alla funzione f.

Un enunciato che "approssima" il risultato reale è

Teorema scarto quadratico

Sia f una funzione 2π periodica tale che f^2 sia integrabile in $[-\pi, \pi]$.

Teorema scarto quadratico

Sia f una funzione 2π periodica tale che f^2 sia integrabile in $[-\pi, \pi]$.
Allora s_n converge in media quadratica a f in $[-\pi, \pi]$, ovvero

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_N(t)|^2 \, dt \ \to 0 \qquad \text{per } N \to +\infty$$

Teorema scarto quadratico

Sia f una funzione 2π periodica tale che f^2 sia integrabile in $[-\pi, \pi]$.
Allora s_n converge in media quadratica a f in $[-\pi, \pi]$, ovvero

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_N(t)|^2 \, dt \; \to 0 \qquad \text{per } N \to +\infty$$

Inoltre vale la formula (Eguaglianza di Parseval)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Esempio

Sviluppare in serie di Fourier la funzione su $[-\pi, \pi]$ come $f(x) = x$ ed estesa in modo periodico su $\mathbf{R}$.
Facendo i conti e sfruttando il fatto che f sia dispari, si ottiene

$$x = 2\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

in ogni punto $x \neq (2k+2)\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.
Utilizzando la eguaglianza di Parseval si ottiene

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Teorema

Sia f una funzione 2π-periodica. Inoltre $[-\pi, \pi]$ possa essere suddiviso in un numero finito di intervalli su cui sia monotona.

Allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto con somma data dalla

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

Esempio

Sviluppare in serie di Fourier la funzione definita da $f(x) = x^4$ su $[-\pi, \pi)$ ed estesa su $\mathbf{R}$ in modo periodico.

Esempio

Sviluppare in serie di Fourier la funzione definita da $f(x) = x^4$ su $[-\pi, \pi)$ ed estesa su $\mathbf{R}$ in modo periodico. Facendo i conti, tenendo conto che f e' pari, si ottengono

$$b_n = 0, \qquad \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \, dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$a_n = \frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{48(-1)^n}{n^4}, \qquad \forall n \geq 1$$

Esempio

Sviluppare in serie di Fourier la funzione definita da $f(x) = x^4$ su $[-\pi, \pi)$ ed estesa su $\mathbf{R}$ in modo periodico. Facendo i conti, tenendo conto che f e' pari, si ottengono

$$b_n = 0, \qquad \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \, dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$a_n = \frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{48(-1)^n}{n^4}, \qquad \forall n \geq 1$$

ovvero

$$x^4 = \frac{2\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} - 48 \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^4}$$

dove la serie converge uniformemente su tutto $\mathbf{R}$ dato che la funzione e' continua e monotona a tratti.

dove la serie converge uniformemente su tutto$\mathbf{R}$ dato che la funzione e' continua e monotona a tratti.
si ha sostituendo $x = \pi$

$$\pi^4 = \frac{2\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} - 48 \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^4}$$

dove la serie converge uniformemente su tutto$\mathbf{R}$ dato che la funzione e' continua e monotona a tratti.
si ha sostituendo $x = \pi$

$$\pi^4 = \frac{2\pi^4}{5} + 8\pi^2 \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} - 48 \sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^4}$$

e siccome abbiamo visto che

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

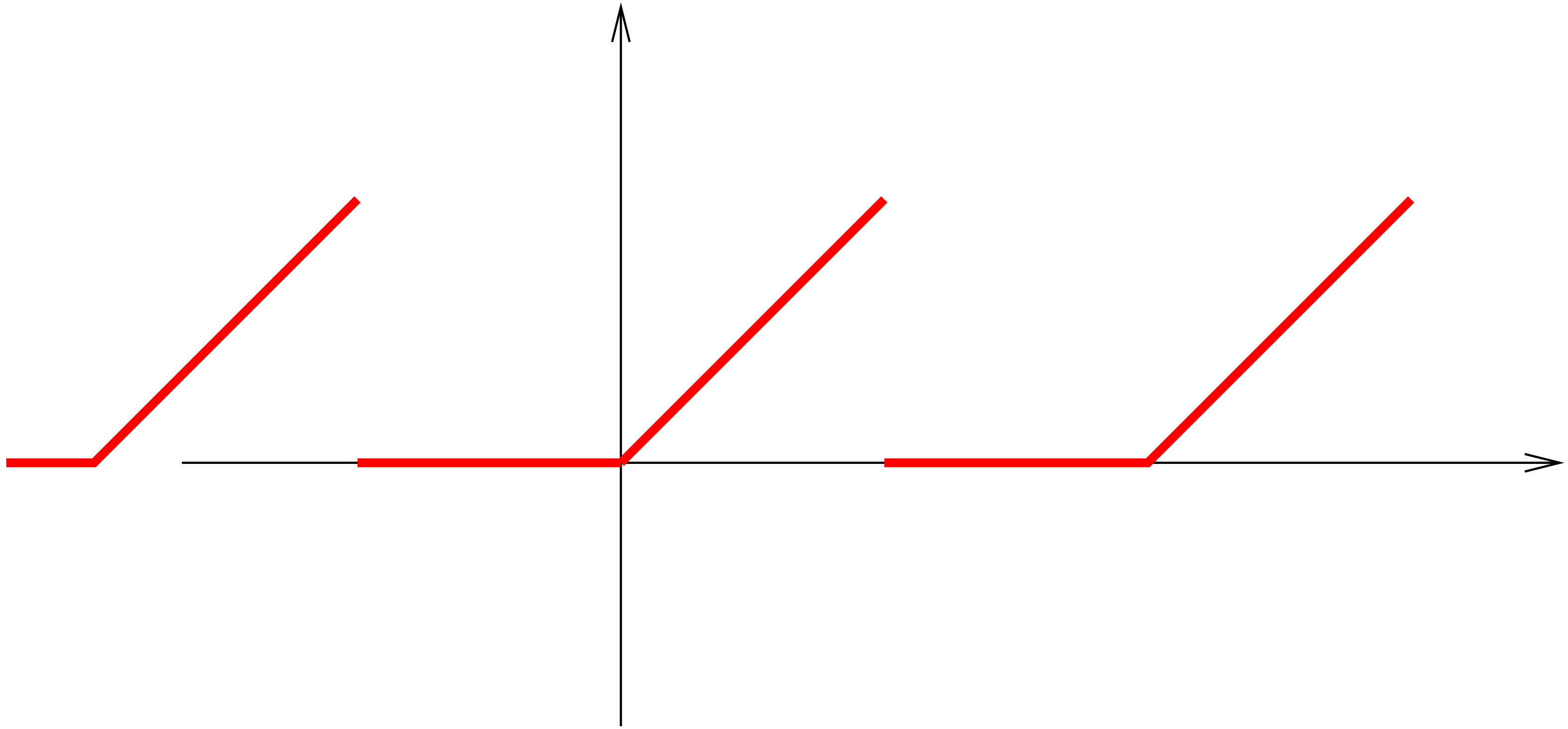
si ottiene

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Esempio

Sviluppare in serie di Fourier la funzione 2π-periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0 \\ \\ x & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



Esempio

Data la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = f(x + 2\pi)$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < |x| < \pi \end{cases}$$

Scrivere i coefficienti di Fourier di f. A quale funzione la serie di Fourier associata ad f converge puntualmente?