Equazioni differenziali: formule

Equazioni a variabili separabili

$y' = A(x)B(y)$

Vale teorema esistenza e unicità locale

$$\int \frac{y'}{B(y)} dy = \int A(x)dx$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)B(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si applicano le condizioni alla fine dei due integrali indefiniti, oppure

$$\int_{y_0}^{y} \frac{y'}{B(y)} dy = \int_{x_0}^{x} A(x)dx$$

Equazioni lineari del primo ordine

$y' = A(x)y + B(x)$

Per il teorema di struttura le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo

$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$

Dove $y_0(x)$ è l'integrale dell'omogenea associata e $\tilde{y}(x)$ una soluzione particolare dell'equazione completa.

L'integrale dell'omogenea associata è

$y' = e^{\int a(t)dt}$

La soluzione particolare dell'equazione completa si trova col metodo di variazione delle costanti arbitrarie, applicando la seguente formula:

$$\tilde{y}(x) = \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx$$

La soluzione completa è quindi

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int e^{-\int a(x)dx} b(x)dx\right)$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y + B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si applicano le condizioni all'integrale finale

$$y(x) - y_0 = e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\left(c + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx} b(x)dx\right)$$

Equazioni lineari del secondo ordine

$y''+ay'+by=f(x)$

E’ possibile risolverle solo se i coefficienti sono **costanti**
La soluzione è uno spazio vettoriale in due dimensioni: se y1 e y2 sono infatti due soluzioni dell’omogenea associata e k1, k2 due scalari appartenenti a R, k1y1+k2y2 è ancora soluzione dell’omogenea, ma anche y1-y2 è ancora soluzione.
Per il teorema di struttura le soluzioni sono sempre e comunque del tipo

$\underline{y}(x)=\underline{y_0}(x)+\underline{\tilde{y}}(x)$

Partendo dall’omogenea associata, cerco soluzioni della forma:

$y(x)=e^{\lambda x}$ per cui

$y'(x)=\lambda e^{\lambda x}$

$y''(x)=\lambda^2 e^{\lambda x}$

L’equazione diventa una cosa del tipo

$\lambda^2+a\lambda+b=0$ (1)

Una volta trovati i valori di λ la soluzione sarà

$y_0(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

Se ho due autovalori uguali dovrò cercare la seconda primitiva come:

$y(x)=xe^{\lambda x}$

E la soluzione sarà quindi

$y_0(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}=(c_1+c_2x)e^{-x}$

Per trovare la soluzione particolare abbiamo due metodi:

1) Metodo di variazione delle costanti arbitrarie
   Ci dà la formula:
   $$\tilde{y}(x)=\int\frac{-y_2(x)f(x)}{y_2'(x)y_1(x)-y_1'(x)y_2(x)}$$
2) Metodo di verosimiglianza
   Se f(x) è fatta bene, cerchiamo di associarla a un polinomio di questo genere
   $f(x)=P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$
   Prendo due valori di λ:
   $\lambda_1=\alpha+i\beta$
   $\lambda_2=\alpha-i\beta$
   Se nessuno di questi due è soluzione del polinomio caratteristico (1) allora
   $\tilde{y}(x)=Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x+R_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$
   Dove $Q_m(x)$ ed $R_m(x)$ sono due polinomi completi di grado m di cui si devono determinare i coefficienti

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+ay'+by=f(x) \\ y(x_0)=y_0' \\ y'(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Si applicano le condizioni alla fine

Equazioni lineari di ordine superiore al secondo e sistemi non omogenei

$$\overline{y}'(x) = A(x)\overline{y}(x) + \overline{b}(x)$$

Supponiamo di avere una equazione più complicata della precedente in forma lineare

$$y^n(x) = a_1(x)y^{n-1}(x) + \ldots + a_n(x)y' + b(x)$$

L'equazione può essere ricondotta in un sistema di equazioni del primo ordine tramite la seguente sostituzione

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y_1' = y' \\ y_3 = y_2' = y'' \\ \ldots \\ y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)'} \end{cases}$$

Il sistema si può quindi scrivere come:

$$\overline{y}'(x) = A(x)\overline{y}(x) + \overline{B}(x)$$

Dove la matrice A sarà costruita come segue

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n(x) & a_{n-1}(x) & \cdots & \cdots & \cdots & a_1(x) \end{bmatrix}$$

$$\overline{y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{bmatrix}$$

Sappiamo risolvere il sistema solo se è a coefficienti costanti, ovvero A(x) è A.

Cominciamo a risolvere il sistema omogeneo: $\overline{y}'(x) = A\overline{y}(x)$

Si ricorre al calcolo della matrice esponenziale:

1) Si determinano gli autovalori della matrice $(A - \lambda I)$ dove I è la matrice identica
2) Si determinano gli autovettori relativi agli autovalori trovati (NB devono essere tutti diversi, se ci sono autovalori ripetuti il caso non è stato trattato a lezione)
3) La soluzione del sistema è $y_O(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}\underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\underline{v}_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}\underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}\underline{v}_i$ dove v1, v2 ecc sono gli autovettori associati agli autovalori

Per trovare una soluzione particolare è necessario il calcolo della matrice esponenziale

La matrice esponenziale è, detta S la matrice degli autovalori $e^{Ax} = Se^{\lambda x}S^{-1}$ dove $e^{\lambda x}$ è la matrice sulla cui diagonale compare l'esponenziale degli autovalori.
A questo punto

$$y_p(x) = \int_0^x e^{(x-s)A} b(s)\, ds$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ y''(x_0) = y_0'' \\ \vdots \\ y^{n'}(x_0) = y_0^{n'} \end{cases}$$

Anche qui le condizioni si applicano alla fine.

Equazione di Eulero

Secondo ordine

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x)$$

$$y'' = \frac{f(x) - a_1 x y' - a_2 y}{a_0 x^2} \qquad x \neq 0$$

Si risolve mediante la sostituzione

$$x = \begin{cases} e^t & x > 0 \\ e^{-t} & x < 0 \end{cases}$$

Calcolo la funzione in t e le sue derivate (caso x positivo)

$$u(t) = y(e^t)$$

$$u'(t) = y'(e^t)e^t$$

$$u''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + u'(t)$$

$$\rightarrow a_0 u'' + (a_1 - a_0)u' + a_2 u = f(e^t)$$

Da qui ci si riconduce al caso lineare

Terzo ordine

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = f(x)$$

Si risolve mediante la sostituzione

$$x = \begin{cases} e^t & x > 0 \\ e^{-t} & x < 0 \end{cases}$$

Calcolo la funzione in t e le sue derivate (caso x positivo)

$$u(t) = y(e^t)$$

$$u'(t) = y'(e^t)e^t$$

$$u''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + u'(t)$$

$$u'''(t) = y'''(e^t)e^{3t} + u''(t)$$

$$\rightarrow a_0 u''' + (a_1 - a_0)u'' + (a_2 - a_1)u' + a_3 u = f(e^t)$$

Da qui in poi ci si riconduce al caso lineare del terzo ordine