Equazioni differenziali: tipologie e metodi risolutivi

Terminologia

- Ogni funzione che verifica un'equazione differenziale si chiama *soluzione* o *integrale dell'equazione*.
- Il grafico di una soluzione si chiama *curva integrale*.
- L' *integrale (o soluzione) generale* è l'insieme di tutte le funzioni che sono integrali dell'equazione.
- L'ordine di un'equazione differenziale è dato dal massimo ordine della derivata che compare in essa.

Semplificazione comune

$\ln\|y\| = f(x) + c$	$y = e^{f(x) + c}$

Equazioni differenziali del primo ordine – soluzione generale del tipo: $y = f(x) + costante$

- **Semplici:** $y' = f(x)$ ovvero sono esplicitate rispetto alla derivata prima della funzione incognita y, come ad esempio: y' = 2x + 1

  Isolare a sinistra dell'uguale la derivata prima e a destra tutto il resto, dopodichè integrare da entrambe le parti rispetto alla variabile **x**:
  $$\int y'\,dx = \int f(x)\,dx$$
  Semplificare i risultati degli integrali per ottenere la soluzione finale.

- **A variabili separabili:** $y' = g(x) \cdot h(y)$ con g(x) ed h(x) continue ed h(x) ≠ 0

  Ricondursi alla forma normale. Riscrivere **y'** come $\frac{dy}{dx}$ dopodichè moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per $\frac{1}{h(y)}dx$ (y con il suo grado e coefficiente), in modo da avere solo **y** a sinistra e solo **x** a destra. Integrare entrambi i membri dell'equazione e semplificare i risultati per ottenere la soluzione finale.

- **Omogenee:** $y' = \frac{A(x;y)}{B(x;y)}$ con A(x, y) e B(x, y) polinomi omogenei di grado *n*.

  Ricondursi alla forma normale. Si pongono: $y = xu$ e $y' = u + xu'$ e si sostituiscono nell'equazione, che diventa a variabili separabili. Si trova la soluzione in u e poi si moltiplica per **x** per trovare il risultato finale (perché y = xu).

- **Lineari:** $y' + a(x)y = b(x)$ con a(x) e b(x) funzioni note e continue
  - Se b(x) = 0 è lineare omogenea. La soluzione è data da: $y = k\,e^{-\int a(x)dx}$ $k \in \mathbb{R}$ e costante
  - Se b(x) ≠ 0, la soluzione è data da: $y = e^{-\int a(x)dx} \cdot \left[\int \left(e^{\int a(x)dx} \cdot b(x)\right)dx + c\right]$

Equazioni differenziali del primo ordine – problema di Cauchy

Per avere un problema di Cauchy devo assegnare i valori di **y** e di tutte le sue derivate fino alla **(n-1)**-esima in uno stesso punto **x_0**. Nel caso delle equazioni differenziali del primo ordine:
$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$
La soluzione del sistema, se esiste, è unica ed è del tipo: $y = f(x) + costante\,trovata$

Tecnica:

Si risolve l'equazione differenziale del primo ordine come nel caso generale. Successivamente nella soluzione si sostituisce ad **x** il valore assegnato ad **x_0** e ad **y** il valore assegnato a **y_0**. Infine si risolve e si trova il valore di **c**.

Esempio: $\begin{cases} 6x+3y'-12 = 0 \\ 5 = f(2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x^2+4x+c \\ 5 = f(2) \end{cases} \rightarrow 5 = -2^2+4\cdot 2+c \rightarrow c = 1$

Equazioni differenziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti

Sono equazioni che soddisfano la condizione per cui: $y'' + b y' + c y = r(x)$
in cui **b** e **c** sono numeri reali e **r(x)** è una funzione continua in un dato intervallo. Se b e c non sono costanti, l'equazione differenziale non è risolvibile!

- **Omogenee, se r(x) = 0**. Forma normale: $y'' + b y' + c y = 0$

  Associare l'equazione a quella di secondo grado in **z**, detta equazione caratteristica, data da:
  $z^2 + b z + c = 0$ e calcolarne $\Delta = b^2 - 4c$

  - $\boldsymbol{\Delta > 0}$
    Determinare le due soluzioni reali distinte z_1 e z_2 e la soluzione dell'equazione è data da:
    $y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

  - $\boldsymbol{\Delta = 0}$
    Determinare le due soluzioni reali coincidenti $z_1 = z_2$ e la soluzione dell'equazione è data da:
    $y = e^{z_1 x}(c_1 + c_2 x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

  - $\boldsymbol{\Delta < 0}$
    Determinare le due soluzioni complesse coniugate: $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
    La soluzione è data da:
    $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- **Non Omogenee, se r(x) ≠ 0.** Forma normale: $y'' + b y' + c y = r(x)$ (vedi anche metodo a pag 4)

  Si considera l'omogenea associata: $y'' + b y' + c y = 0$ e la si risolve. Chiamiamo y_1 il suo risultato.

  Ora si risolve l'equazione non omogenea, in base alla natura di r(x):

  - **Se r(x) è un polinomio**,
    - **Se c ≠ 0** nella forma normale porre: $y = ax + b$, $y' = a$ e $y'' = 0$ e semplificare.

      Affinchè i polinomi ad entrambi i membri siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti
      - Uguaglianza dei coefficienti di x
      - Uguaglianza dei coefficienti dei termini noti

      Si trovano così i valori di **a** e **b**. La soluzione particolare, chiamata y_0 è del tipo: $y_0 = ax + b$
      L'integrale generale si ottiene facendo: $y = y_0 + y_1$

    - **Se c = 0 e b ≠ 0** nella forma normale porre: $y' = 2ax + b$ e $y'' = 2a$ e semplificare.

      Affinchè i polinomi ad entrambi i membri siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti:
      - Uguaglianza dei coefficienti di x
      - Uguaglianza dei coefficienti dei termini noti

      Si trovano così i valori di **a** e **b**. La soluzione particolare y_0 è del tipo: $y_0 = ax^2 + bx$
      L'integrale generale si ottiene facendo: $y = y_0 + y_1$

    - **Se c = 0 e b = 0** l'equazione differenziale si risolve integrando due volte il polinomio **r(x)**.

  - **Se r(x) è del tipo: s(x) $e^{\alpha x}$** (dove s(x) è un polinomio e α è un numero reale)
    - **Se α non è uguale ad una delle soluzioni dell'omogenea associata**, nella forma normale porre:
      $y = (ax+b)e^x$, $y' = (ax + b + a)e^x$ e $y'' = (ax + b + 2a)e^x$
      e semplificare dove possibile.

      Affinchè i polinomi ad entrambi i membri siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti:
      - Uguaglianza dei coefficienti di x
      - Uguaglianza dei coefficienti dei termini noti

      Si trovano così i valori di **a** e **b**. La soluzione particolare y_0 è del tipo: $y_0 = ax + b$
      L'integrale generale si ottiene facendo: $y = (y_0)e^x + y_1$

- **Se α è uguale ad una delle soluzioni distinte dell'omogenea associata**, nella forma normale porre: $y = (ax+b)e^x$, $y' = (ax + b + a)e^x$ e $y'' = (ax + b + 2a)e^x$ e semplificare dove possibile.

  Affinchè i polinomi ad entrambi i membri siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti:
  - Uguaglianza dei coefficienti di x
  - Uguaglianza dei coefficienti dei termini noti

  Si trovano così i valori di **a** e **b**. La soluzione particolare y_0 è del tipo: $y_0 = ax + b$

  L'integrale generale si ottiene facendo: $y = x(y_0)e^{\alpha x} + y_1$

- **Se le due soluzioni dell'omogenea associata sono coincidenti ed uguali ad α**, si procede in modo identico al punto precedente, ma l'integrale generale è nella forma:
  $$y = x^2(y_0)e^{\alpha x} + y_1$$

◦ **Se r(x) è del tipo: $e^{\alpha x}$ (h cos β x + k sin β x)**, dove α, β, h, k sono numeri reali.
Se non c'è **e**, α = 0. Se non c'è **cos**, h = 0. Se non c'è **sin**, k = 0.
Scrivere in ogni caso i valori di α e β che dovranno essere sostituiti nelle espressioni di seguito

- **Se α + i β non è soluzione dell'omogenea associata**, nella forma normale porre:
  $$y = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x) \quad ,$$
  $$y' = e^{\alpha x}\left[\sin(\beta x)(\alpha b - \beta a) + \cos(\beta x)(\alpha a + \beta b)\right]$$
  $$y'' = e^{\alpha x}\left[\sin(\beta x)(\alpha^2 b - \alpha\beta a - \beta^2 b) + \cos(\beta x)(\alpha^2 a + 2\alpha\beta b - \beta^2 a)\right]$$

  Affinchè i polinomi ad entrambi i membri siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti:
  - Uguaglianza dei coefficienti di sinx
  - Uguaglianza dei coefficienti di cosx

  Si trovano così i valori di **a** e **b**.

  L'integrale generale è nella forma:
  $$y = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x) + y_1$$

- **Se α + i β è soluzione dell'omogenea associata**, nella forma normale porre:
  $$y = x e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x) \quad ,$$
  $$y' = e^{x\alpha}\left[\sin(\beta x)(-ax\beta + bx\alpha + b) + \cos(\beta x)(ax\alpha + bx\beta + a)\right] \quad ,$$
  $$y'' = e^{x\alpha}\left\{\sin(\beta x)\left[b(x\alpha^2 - x\beta^2 + 2\alpha) - 2a\beta(\alpha x + 1)\right] + \cos(\beta x)\left[a(x\alpha^2 - x\beta^2 + 2\alpha) + 2b\beta(x\alpha + 1)\right]\right\}$$

  Affinchè i polinomi ad entrambi i membri siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti:
  - Uguaglianza dei coefficienti di sinx
  - Uguaglianza dei coefficienti di cosx

  Si trovano così i valori di **a** e **b**.

  L'integrale generale è nella forma:
  $$y = x e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x) + y_1$$

Equazioni differenziali del secondo ordine – problema di Cauchy

Per avere un problema di Cauchy devo assegnare i valori di **y** e di tutte le sue derivate fino alla **(n-1)**-esima in uno stesso punto $\mathbf{x_0}$. Nel caso di Equazioni differenziali del secondo ordine si avrà un sistema del tipo:

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

<u>Tecnica:</u>
Trovare la soluzione dell'equazione differenziale e derivarla. Nella soluzione sostituire $\mathbf{x_0}$ ed $\mathbf{y_0}$, mentre nella derivata

sostituire $\mathbf{x_0}$ ed $\mathbf{y_1}$. Svolgere i calcoli per trovare $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$.

Metodo di variazione delle costanti (solo per equazioni differenziali lineari)

1. Risolvere l'omogenea associata dell'equazione differenziale lineare.
   Esempio: $u'' + 3u' - 4u = e^{2t}$ che si risolve in: $u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}$

2. Sostituire a le due costanti con **a(t)** e **b(t)** che saranno le due funzioni che dovremo trovare
   Esempio: $u(t) = a(t)e^t + b(t)e^{-4t}$

3. Derivare il risultato dell'omogenea associata:
   Esempio: $u'(t) = a'(t)e^t + a(t)e^t + b'(t)e^{-4t} - 4b(t)e^{-4t}$

4. Imporre la somma delle derivate prime **a'(t) e b'(t) = 0** e si otterrà la prima equazione del sistema finale
   Esempio: $a'(t)e^t + b'(t)e^{-4t} = 0$

5. Derivare una seconda volta **u'(t)**, tenendo conto che i termini posti a zero nel precedente punto non vanno considerati
   Esempio: $u''(t) = a'(t)e^t + a(t)e^t - 4b'(t)e^{-4t} + 16b(t)e^{-4t}$

6. Sostituire u(t), u'(t) e u''(t) nell'equazione differenziale originaria (quella del punto 1) e semplificare

   Esempio:
$$\begin{array}{rl} a'(t)e^t + \cancel{a(t)e^t} - 4b'(t)e^{-4t} + \cancel{16b(t)e^{-4t}} + & \leftarrow \text{equazione } u''(t) \\ \cancel{3a(t)e^t} - \cancel{12b(t)e^{-4t}} + & \leftarrow \text{equazione } u'(t) \\ - \cancel{4a(t)e^t} - \cancel{4b(t)e^{-4t}} & \leftarrow \text{equazione } u(t) \\ = e^{2t} & \end{array}$$

   __NOTA BENE__: Tutti i termini **a(t)** e **b(t)** DEVONO SEMPLIFICARSI, altrimenti c'è un errore e devono rimanere solo i termini **a'(t)** e **b'(t)**
   Si otterrà la seconda equazione da inserire nel sistema

7. Impostare il sistema con le due equazioni trovate e risolverlo per ricavare **a'(t)** e **b'(t)**:
$$\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)e^{-4t} = 0 \\ a'(t)e^t - 4b'(t)e^{-4t} = e^{2t} \end{cases} \rightarrow \ b'(t) = -\frac{1}{5}e^{6t} \ ; \quad a'(t) = \frac{1}{5}e^t$$

8. Integrare **a'(t)** e **b'(t)** e sostituirli nell'equazione al punto 2, poi semplificare per trovare la soluzione particolare.
$$\int a'(t)\,dt = \frac{1}{5}e^t \ ; \qquad \int b'(t)\,dt = -\frac{1}{30}e^{6t}$$
   Sostituisco nell'equazione e ottengo la soluzione particolare: $\frac{1}{5}e^t \cdot e^t - \frac{1}{30}e^{6t} \cdot e^{-4t} = \frac{1}{6}e^{2t}$

9. Trovo l'integrale generale come combinazione lineare della soluzione dell'omogenea associata e della soluzione particolare:
$$u_{finale} = c_1 e^t + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$