# Analisi 2

## Argomenti

- Successioni di funzioni
  - Definizione
  - Convergenza puntuale
    - Proprietà della convergenza puntuale
  - Convergenza uniforme
  - Continuità e limitatezza
    - Teorema della continuità del limite
    - Teorema della limitatezza del limite
- Serie di funzioni
  - Definizione
  - Convergenza puntuale
  - Convergenza uniforme
  - Convergenza assoluta
  - Convergenza totale
    - Criterio di Weierstrass
  - Integrazione per serie
  - Derivazione per serie
- Derivate parziali
  - Multi-indice
  - Funzione differenziabile
  - Vettore gradiente
  - Differenziale
  - Teorema per la differenziabilità
  - Derivata direzionale
  - Formula del gradiente
  - Derivazione della funzione composita
  - Legame tra derivata e differenziale
- Teorema di Fermat
  - Ipotesi
  - Tesi
  - Dimostrazione
- Teorema di Schwartz
  - Ipotesi
  - Tesi
- Teorema di Taylor
  - Ipotesi
  - Tesi
- Matrice Hessiana

# Successioni di funzioni

## Definizione

Consideriamo la funzione $f_n(x): A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dice **successione di funzioni** e si indica con il simbolo $\{f_n\}$ l'applicazione lineare che associa ad ogni $n \in \mathbb{R}$ una funzione $f_n(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui dominio è $A \in \mathbb{R}$.

## Convergenza puntuale

Immaginiamo di fissare un punto $x_0 \in A$ e consideriamo la successione in tale punto $f_n(x_0)$:

Se per ogni $x_0 \in A$ la successione $f_n(x_0)$ converge ed il valore del suo limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ è uguale ad una certa funzione $f(x)$ allora diremo che la successione **converge puntualmente** ad $f(x)$ nell'intervallo A.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x)\ \forall x_0 \in A$$

**NB:** Per verificare che una successione converge puntualmente bisogna valutare prima il suo insieme di convergenza discutendo i valori di x e poi valutare il limite della successione per $n \to +\infty$ (e non il valore a cui converge la successione!).

**Es:** La successione $f_n(x) = x^n$ converge se $x \in (-1;1)$ e converge puntualmente a 0 $\forall x \in (-1;1)$ perchè $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0\ \forall x \in (-1;1)$

### Proprietà della convergenza puntuale

Sia data una successione $\{f_n(x)\}$ la quale converge a $f(x) \forall x \in A$, per essa valgono le seguenti proprietà

- $\forall n \in \mathbb{N}$ se $f_n(x) \geq 0\ \forall x \in A \implies f(x) \geq 0\ \forall x \in A.$
  - Se la successione è a termini positivi per ogni x in A, allora f(x) è positiva in A
- $\forall n \in \mathbb{N}$ se $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\ in\ A \implies f(x) \leq f(x+1)\ in\ A$
  - Se la successione è non decrescente in A, allora f(x) è non decrescente in A

## Convergenza uniforme

Sia data una successione $\{f_n(x)\}$ ed il suo limite $f(x)\ \forall x \in A$:

La successione **converge uniformemente** ad $f(x)$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

**NB:** La convergenza uniforme implica quella puntuale

**Es:** La successione $f_n(x) = x^n$ ha come limite $f(x) = 0$ quindi: $\lim_{n\to+\infty} \sup_{-1<x<1} |x^n - 0| = 1$ quindi la successione **non** converge uniformemente a 0.

## Continuita e limitatezza

### Teorema della continuità del limite

Sia data la successione $\{f_n(x)\}$ la quale converge uniformemente ad una funzione $f(x)$. Se $f_n(x_0)$ è continua in $x_0 \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$ allora anche $f(x)$ è continua in $x_0$.

**NB:** Se la funzione limite $f(x)$ non è continua, allora la successione $\{f_n(x)\}$ non può convergere uniformemente ad $f(x)$.

### Teorema della limitatezza del limite

Sia data la successione $\{f_n(x)\}$ la quale converge uniformemente ad una funzione $f(x)$. Se $f_n(x)$ è limitata $\forall n \in \mathbb{N}$ (ovvero non è mai superiore ad un certo valore $M \in \mathbb{R}$), allora anche $f(x)$ è limitata in A.

# Serie di funzioni

## Definizione

Consideriamo la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$, si dice **serie di funzioni** e si indica con il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la successione di funzioni definita come $\{\sum_{i=1}^{n} f_n(x)\}$.

Il termine generico $s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$ si chiama **somma parziale n-esima,** quindi una serie di funzioni non è altro che una successione di somme parziali di una certa funzione $f_n(x)$ definita come $\{s_n\}$.

## Convergenza puntuale

Una serie **converge puntualmente** ad $f(x)$ nell'intervallo A se la successione $\{s_n\}$ converge puntualmente ad $f(x)$ nell'intervallo A.

## Convergenza uniforme

Una serie **converge uniformemente** ad $f(x)$ nell'intervallo A se la successione $\{s_n\}$ converge uniformemente ad $f(x)$ nell'intervallo A.

**NB:** La convergenza uniforme implica quella puntuale.

## Convergenza assoluta

Una serie **converge assolutamente** nell'intervallo A se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente nello stesso intervallo.

## Convergenza totale

**NB:** La convergenza totale implica la convergenza assoluta e quella uniforme

### Criterio di Weierstrass

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni. Se esiste una serie numerica $\sum_{i=0}^{+\infty} a_n$ per cui vale

$|f_n(x)| < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$ (ovvero esiste una serie numerica che maggiora la serie di funzioni per ogni n e per ogni n in $\mathbb{N}$) e la serie numerica converge allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ **converge totalmente** in A.

## Integrazione per serie

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni la quale converge uniformemente in un intervallo $[a; b]$. Per tale serie sia ha che:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)$$

**NB:** Il criterio è particolarmente utile quando non si riesce ad integrare una funzione: in tal caso la si può scrivere come serie di Taylor o MacLaurin ed integrare ogni singolo componente.

## Derivazione per serie

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni la quale converge puntualmente in un intervallo $A$ e per la quale $f_n(x)$ risulta derivabile $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A$. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'(x)$ converge uniformememente in A allora sia ha che:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

# Derivate parziali

Sia *v* un vettore di *n* componenti, si dice **derivata parziale** della funzione f(v) rispetto a $v_n$ e si indica con $\frac{\partial f}{\partial v_n}$, la derivata della funzione f considerando ciascun $v_i \; con \; i \neq n$ come una costante.

In una funzione in due variabili f(x,y) le derivate parziali rispetto ad una variabile indicano il coefficiente angolare della retta tangente alla curva generata tra l'intersezione del piano di equazione $x = x_0$ (nel caso della derivata parziale rispetto ad y $\frac{\partial f}{\partial y}$) o di equazione $y = y_0$ (nel caso della derivata parziale rispetto ad x $\frac{\partial f}{\partial x}$) e la superficie $z = f(x, y)$. Le rette tangenti in un punto $(x_0, y_0)$ generano un piano *"candidato"* a svolgere la stessa funzione della retta tangente in un punto nel caso di una funzione in una sola variabile, tuttavia ciò non basta per garantire l'approssimazione lineare della superficie, ne tantomeno la sua continuità.

Il piano generato dalle rette tangenti $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ ha equazione:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

## Multi-indice

Sia f $f \in C^N \; in \; x_0 \in D(f)$ se esistono tutte le derivate parziali di ordine k in $x_0$e sono continue.

Definiamo $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ detto "multi-indice" a cui viene associata una lunghezza $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$

Una derivata parziale potrà essere scritta come $D^{|\alpha|}f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}$

*Esempi di altre notazioni:*

$$\mathrm{D}^2_{12} = \mathrm{D}^2_{\mathrm{xy}} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y} \partial \mathrm{x}}$$

## Funzione differenziabile

Il piano di cui sopra approssima la superficie in ogni punto a meno di un errore pari alla distanza tra esso e l'incremento lungo la funzione $f(x, y)$, ovvero *h* lungo x e *k* lungo y. Tradotto in formule il piano approssima linearmente la funzione $f(x, y)$ se è valida la seguente equazione:

$$f(x, y) = \; f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \sqrt{h^2 + k^2}$$

Dove l'ultimo termine è mutuato dalla definizione di distanza in uno spazio tra due punti in $R^2$. Usando un'altra forma si ha quindi:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - \; f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Dove $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$ (per definizione di incremento).

Qualora la funzione *f* soddisfi l'equazione di cui sopra, essa sarà detta **differenziabile.**

*NB: La differenziabilità di una funzione ne garantisce anche la continuità.*

Più in generale una funzione si dice differenziabile in un punto $x \epsilon D(f), x = \{x_1, \dots, x_n\}$ se esiste un vettore $a \epsilon R^n$ tale per cui valga la seguente equazione:

$f(x + h) - f(x) = a \cdot h + o(|h|)$ per h→0

*NB: h è un n-upla ed indica l'incremento lungo ogni direzione nello spazio n-dimensionale.*

*NB: il valore dell'errore commesso $o(|h|)$è di ordine più piccolo rispetto alla lunghezza di |h| per h→0.*

## Vettore gradiente

Se f è differenziabile allora vale:

$a = \nabla \mathrm{f(x)} := [\frac{\partial f}{\partial x_1}; \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}]$ dove a è detto **vettore gradiente.**

## Differenziale

Si dice **differenziale** di f nel punto x il prodotto tra il vettore gradiente ed il vettore incremento:

$df(x) = \nabla \mathrm{f(x)} \cdot h$

Il differenziale indica l'incremento della funzione f lungo il piano tangente.

In generale l'equazione dell'iperpiano tangente in un punto $p = \{x_1, \dots, x_n\}$ ha equazione:

$$z = f(p) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x - x_i) = f(p) + \nabla \mathrm{f(p)} \cdot h$$

## Teorema per la differenziabilità

Sia $f: D(f) \subseteq R^n \to R$ tale che esistano continue le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), i: 1..n$ ed x sia un punto appartenente al dominio di f, allora quest'ultima è differenziabile nel punto x (condizione sufficiente).

Se le derivate parziali sono continue in un intervallo aperto $A \subseteq D(f)$ allora la funzione f si dice di classe $\boldsymbol{C^1(A)}$.

## Derivata direzionale

Sia v un versore detto "direzione", dicesi **derivata direzionale** il limite tale per cui valga:

$D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\cdot v) - f(x)}{|h|_n}$ dove x e h sono due n-upla.

Limitatamente a due dimensioni si ha pertanto:

$$D_{v1,v2} f(x_0, y_0) = \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h_1 v_1, y_0 + h_2 v_2) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

**NB: Se una funzione ammette derivate direzionali per ogni direzione ciò non assicura la sua differenziabilità!**

## Formula del gradiente

In generale è possibile scrivere la derivata direzionale di una funzione f lungo una direzione v usando il suo gradiente:

$$D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$$

Come conseguenza della precedente si ha quindi che:

$$|D_v f| \leq |\, \nabla f(x) \cdot v| \leq |\nabla f(x)||v|, |v| = 1$$

Da ciò si deduce che la massima variazione si ottiene lungo la direzione espressa dal gradiente di f e la sua direzione vale $\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.

## Derivazione della funzione composta

***Caso 1:***

Siano $f: D(f) \subseteq R^n \to R, g: I \subseteq R \to R, h(x) = g(f(x))$ con x n-upla.

Se f è differenziabile in x e g è derivabile in f(x) allora h è differenziabile in x:

$\nabla h(x) = g'(f(x))\nabla f(x)$

***Caso 2:***

Siano $r: I \subseteq R \to R^n, f: R^n \to R$

Se h è derivabile in $t_0$e f è differenziabile in $r(t_0)$, allora $g(t) = f\big(r(t)\big)$ è derivabile in $t_0$:

$g'(t_0) = \nabla f\big(r(t)\big) \cdot r'(t_0)$

## Legame tra derivata e differenziale

Sia f una funzione, f si dice differenziabile in $(x_0; y_0)$ se esiste una mappa lineare L: $R^2 \to R$ tale che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - L(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Se esiste L (detto **differenziale** di f in $(x_0; y_0)$) esso è unico e vale $L(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$.

Se f è differenziabile in $(x_0; y_0)$allora la derivata direzionale in ogni direzione vale L(h,k).

Se esistono le derivate parziali di f rispetto ad x e ad y in un intorno di $(x_0; y_0)$ e sono continue nel medesimo punto allora f è differenziabile.

Se f è differenziabile in $(x_0; y_0)$ allora vale la seguente equazione:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

# Teorema di Fermat

## Ipotesi

E' data la funzione $f(\underline{x})$

Esiste $\nabla f(\underline{x})$

## Tesi

Se $x_0$ è punto stazionario (minimo, massimo o sella) allora $\nabla f(x_0) = 0$

## Dimostrazione

Consideriamo $g(t) = f(x_0 + t \cdot v)\ con\ v \epsilon R^N$ direzione fissata **non nulla**.

Per il teorema di derivazione della funzione composta g è derivabile in t = 0, inoltre la natura del punto t=0 per g è la stessa di $x_0$ per f.

Per il teorema di Fermat (ristretto ad un'unica dimensione)

$$g'(x_0) = 0 \leftrightarrow g'(t) = \nabla f(x_0 + t \cdot v) \cdot v = 0\ (per\ t = 0)\ \forall v \in R$$

Visto che v non può essere nullo per le condizioni iniziali, allora il gradiente deve necessariamente annullarsi.

# Teorema di Schwartz

## Ipotesi

E’ data la funzione $f(\underline{x})$

Esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

## Tesi

Le derivate parziali miste coincidono per qualunque ordine di derivazione: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

# Teorema di Taylor

## Ipotesi

E' data la funzione $f(\underline{x})$ continua con $f \in C^2(A)$ *(la derivata seconda è continua nell'intervallo A).*

## Tesi

$\forall x_0 \in A$ vale la formula: $f(x_0 + \underline{h}) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o(|h|^2)$

- $f(x_0 + \underline{h}) - f(x_0)$ *è l'incremento di f.*
- $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$ *tende a 0 se* $x_0$ *è punto critico.*
- $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o(|h|^2)$ *indica il segno dell'incremento.*

# Matrice Hessiana

## Definizione

Sia data la funzione $f(\underline{x})$ con $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, si dice **matrice hessiana** la matrice quadrata in cui l'entrata **i,j** è data dalla derivata parziale seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

In $R^2$ la **matrice hessiana** di una qualsiasi funzione $f(x,y)$ è uguale a:

$$Hess\ f(x,y) = H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

## Test dell'Hessiana

La matrice hessiana è usata nello studio del carattere delle funzione in un **punto stazionario**.

- Se $H_f(x,y)$ è **definita positiva** il punto è un **minimo**
- Se $H_f(x,y)$ è **definita negativa** il punto è un **massimo**
- Se $H_f(x,y)$ è **indefinita** il punto è una **sella**
- Se $H_f(x,y)$ è **semidefinita** il test non conclude nulla

In $R^2$ è possibile accelerare il processo considerando che la matrice hessiana è di ordine 2 e valgono le seguenti:

- Se $Det\left(H_f(x_0,y_0)\right) > 0$ e $Tr\left(H_f(x_0,y_0)\right) > 0$ gli autovalori sono positivi e concordi ed il punto $(x_0,y_0)$ è un punto di **minimo**.
- Se $Det\left(H_f(x_0,y_0)\right) > 0$ e $Tr\left(H_f(x_0,y_0)\right) < 0$ gli autovalori sono negativi e concordi ed il punto $(x_0,y_0)$ è un punto di **massimo**.
- Se $Det\left(H_f(x_0,y_0)\right) < 0$ gli autovalori sono discordi ed il punto $(x_0,y_0)$ è un punto di **sella**.
- Se $Det\left(H_f(x_0,y_0)\right) = 0$ il test non conclude nulla

## Definizioni correlate

- Dicesi **minore nord ovest** di ordine k di una matrice di ordine n, la sottomatrice quadrata di ordine k con 1 ≤ k ≤ n ottenuta considerando solo le prime n righe e le prime n colonne della matrice originale.
- Una matrice è **definita positiva** se il determinante di ogni "minore nord ovest" di ordine k con 1 ≤ k ≤ n è positivo.
- Una matrice è **definita negativa** se il determinante di ogni "minore nord ovest" di ordine k con 1 ≤ k ≤ n è positivo per k pari e negativo per k dispari.
- Una matrice è **indefinita** se il determinante della matrice è negativo
- Una matrice è **semidefinita** se il determinante della matrice è 0.

## Classificazione dei punti stazionari liberi

Sia data una funzione $f(\underline{x})$ in **n** incognite, si vogliono individuare i **punti stazionari liberi** all'interno del suo dominio:

- Si calcola il vettore gradiente della funzione $\nabla f(\underline{x})$, considerando che l'i-esima entrata del suddetto è pari alla derivata parziale della funzione rispetto all'i-esima variabile.
- Si impone $\nabla f(\underline{x}) = 0$ individuando un sistema lineare omogeneo di **n** equazioni in **n** incognite. Per il teorema di Fermat, se il gradiente della funzione si annulla, l'insieme delle n-uple che risolvono il sistema corrispondono alle coordinate dei punti stazionari della funzione.
- Determino la matrice Hessiana della funzione considerando che la cella **[i,j]** è pari alla derivata parziale seconda della funzione rispetto prima alla i-esima incognita e poi rispetto alla j-esima.
- Si determina il valore della matrice Hessiana in ciascun punto stazionario e si discute il suo valore (vedi paragrafo "Matrice Hessiana – Test dell'Hessiana")

# Classificazione dei punti stazionari vincolati

Sia data una funzione $f(\underline{x})$ in **n** incognite, si vogliono individuare i **punti stazionari vincolati** lungo il bordo del vincolo $v(\underline{x})$ descritto mediante un'equazione in **m** incognite.

## Metodo delle restrizioni

Utile solo in caso di $R^2$ quando è possibile parametrizzare il vincolo.

- Si parametrizza il vincolo usando un numero strettamente minore di **m** incognite. *Ad esempio è possibile parametrizzare una circonferenza o un'ellisse usando un solo parametro:*
  $\begin{cases} x = \rho_x cos\vartheta \\ y = \rho_y sin\vartheta \end{cases}$
  *dove i valori $\rho_x$ e $\rho_y$ sono numeri.*
- Si sostituiscono nella funzione di partenza le incognite, usando la parametrizzazione di cui sopra, ottenendo una funzione in un numero minore di incognite.
- Se la funzione ottenuta ha esattamente una sola incognita allora è possibile studiare la sua derivata prima individuando tutti i suoi punti stazionari (i punti individuati sono punti stazionari anche per la funzione di partenza ristretta al vincolo). Se il numero di incognite è superiore è necessario procedere con ulteriori parametrizzazioni, tuttavia il metodo si complica inutilmente e non è consigliato procedere.
- Tutti i punti individuati sono punti di minimo o di massimo **locali ristretti al vincolo** (mentre si passa dalla regione di piano al bordo lo studio del comportamento della funzione diventa molto complicato quindi non è detto che se un punto è stazionario per il vincolo lo sia anche per la funzione).
- Effettuando semplici confronti numerici (i.e. testanto ogni singolo punto stazionario libero o vincolato e valutando il valore della funzione i tale punto) è possibile determinare i punti di minimo e di massimo **assoluti** *(ciò è garantito dal teorema di Weierstrass: "funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato ammettono punti di minimo e di massimo assoluti").*

## Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Utile in qualsiasi caso! ☺

- Si riscrive l'equazione del vincolo nella forma $v(\underline{x}) = 0$
- Si considera l'equazione della **lagrangiana** $L(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda v(\underline{x})$
- Si determina il gradiente della lagrangiana $\nabla L(\underline{x}, \lambda)$
- Si impone $\nabla L(\underline{x}, \lambda) = 0$ e si risolve il sistema in **n + 1** incognite. Formalmente i valori di $\lambda$ non ci interessano.
- Tutte le soluzioni del sistema di cui sopra rappresentano punti stazionari per il vincolo.
- Per sapere se si tratta di punti di minimo o di massimo si discutono semplicemente i valori assunti dalla funzione nei rispettivi punti.

**NB**: Nel caso in cui ci siano più vincoli, gli eventuali punti di intersezione tra i vincoli vanno testati **obbligatoriamente** a parte.

# Integrali in due variabili

L'integrale definito in due variabili rappresenta il volume sotteso dalla superficie di equazione $f(x, y) = 0$ ristretto ad un dominio chiuso e limitato contenuto in $R^2$.

## Domini y-semplici

Sia $D_1 \in R^2$ dominio chiuso e limitato in R, diremo che $D_1$è semplice rispetto all'asse y (o **y-semplice**) se vale $D_1 = \{(x, y) \in R^2 / \ x \in [a, b] \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ dove $a, b \ \in R$ e $g_1(x), g_2(x): R \to R$.

In altre parole un dominio è y-semplice se è possibile descriverlo come l'area compresa tra due funzioni $(g_1(x), g_2(x))$ e due rette parallele all'asse y $(y = a, y = b)$ ed è quindi possibile "affettarlo" usando rette parallele al medesimo asse.

Se in questa regione di piano la funzione $f(x, y)$ è continua allora vale la seguente:

$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ (**integrale iterato**)

## Domini x-semplici

Sia $D_1 \in R^2$ dominio chiuso e limitato in R, diremo che $D_2$è semplice rispetto all'asse x (o **x-semplice**) se vale $D_1 = \{(x, y) \in R^2 / \ y \in [a, b] \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ dove $a, b \ \in R$ e $h_1(y), h_2(y): R \to R$.

In altre parole un dominio è x-semplice se è possibile descriverlo come l'area compresa tra due funzioni $(h_1(y), h_2(y))$ e due rette parallele all'asse x $(x = a, x = b)$ ed è quindi possibile "affettarlo" usando rette parallele al medesimo asse.

Se in questa regione di piano la funzione $f(x, y)$ è continua allora vale la seguente:

$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$ (**integrale iterato**)

## Cambio di coordinate

Qualora la descrizione del dominio d'integrazione non fosse immediata è possibile valutare l'ipotesi di effettuare un cambio di coordinate, descrivendo il dominio in coordinate polari invece che cartesiane.

Il dominio $D$ può essere scritto nella forma $D' \coloneqq \begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \end{cases}$

L'integrale $\iint_D \ f(x, y) dx dy$ potrà essere scritto come $\iint_{D'} f(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)) \rho d\rho d\vartheta$

## Metodo generico per l'integrazione

- Disegnare il dominio di integrazione
- Valutare se il dominio è semplice (rispetto ad x o ad y) e, qualora non lo fosse, suddividerlo in più sottodomini semplici. In quest'ultimo caso l'integrale da calcolare diventerà la somma di più integrali doppi, calcolati ciascuno su un dominio diverso.
- Descrivere in forma analitica ciascun dominio individuato e valutare l'ipotesi di effettuare un cambio di coordinate qualora fosse conveniente. In caso affermativo ricordarsi di effettuare il cambio di coordinate anche per l'integrale da calcolare.
- Usare la definizione di **integrale iterato** presente nei paragrafi "domini y-semplici" o "domini x-semplici". E' conveniente riflettere su quale delle due definizioni usare per non complicare inutilmente i calcoli.
- Risolvere i vari integrali iterati, considerando che ogni integrazione fa "scomparire" una variabile. Integrando tra i due estremi numerici l'ultimo integrale bisogna aspettarsi un numero come risultato: la presenza di una variabile indicherà inevitabilmente la presenza di un errore.
- Sommare i vari contributi.

## Massa, baricentro e momento di inerzia di una lamina

Sia data una lamina bidimensionale di superficie A

La funzione per calcolare la sua massa è:

$m = \iint_A \delta(x,y)dxdy$ dove $\delta(x,y)$ è la **funzione di densità** della lamina in funzione delle coordinate.

Le coordinate del suo baricentro sono:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_A x\,\delta(x,y)dxdy$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iint_A y\,\delta(x,y)dxdy$$

Il suo momento di inerzia rispetto ad un asse fissato perpendicolare alla lamina è:

$$I = \iint_A d^2\delta(x,y)dxdy$$

Dove $d^2$ è la distanza dell'elemento infinitesimo dall'asse.

# Integrali in tre variabili

L'integrale definito in tre variabili rappresenta il volume sotteso dal' ipersuperficie di equazione $f(x,y,z) = 0$ ristretto ad un dominio chiuso e limitato contenuto in $R^3$.

## Domini

Il dominio d'integrazione di un integrale in tre variabili può essere rappresentato in forma analitica come:

$D = \{(x, y, z) \in R^3 / \ (x, y) \in A \subset R, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$

Con $g(x, y), h(x, y)$ continue e limitate in $R^3$

Estendendo il concetto di dominio semplice degli integrali in due variabili, avremo che D rappresenta il volume d'integrazione compreso tra due superfici di equazione $g(x, y) = z, h(x, y) = z$

## Cambio di coordinate

### Coordinate cilindriche

Qualora la descrizione del dominio d'integrazione non fosse immediata è possibile valutare l'ipotesi di effettuare un cambio di coordinate, descrivendo il dominio in coordinate cilindriche invece che cartesiane.

Il dominio $D$ può essere scritto nella forma $D' := \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$

L'integrale $\iiint_D \ f(x, y, z)dxdy\, dz$ potrà essere scritto come $\iiint_{D'} f(\rho cos\theta, \rho sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$

### Coordinate sferiche

Qualora la descrizione del dominio d'integrazione non fosse immediata è possibile valutare l'ipotesi di effettuare un cambio di coordinate, descrivendo il dominio in coordinate cilindriche invece che cartesiane.

Il dominio $D$ può essere scritto nella forma $D' := \begin{cases} x = \rho sin\phi cos\theta \\ y = \rho sin\phi sin\theta \\ z = \rho cos\phi \end{cases}$

L'integrale $\iiint_D \ f(x, y, z)dxdy\, dz$ potrà essere scritto come

$\iiint_{D'} f(\rho sin\phi cos\theta, \rho sin\phi sin\theta, \rho cos\phi)\rho^2 sin\phi d\rho d\theta d\phi$

## Massa, baricentro e momento di inerzia di un solido

Sia data un solido tridimensionale ristretto ad un dominio D

La funzione per calcolare la sua massa è:

$m = \iiint_D \ \delta(x, y, z)dxdydz$ dove $\delta(x, y, z)$ è la **funzione di densità** del solido in funzione delle coordinate.

Le coordinate del suo baricentro sono:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_D \ x\, \delta(x, y, z)dxdydz$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_D \ y\, \delta(x, y, z)dxdydz$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_D z\,\delta(x,y,z)dxdydz$$

Il suo momento di inerzia rispetto ad un asse fissato è:

$$I = \iiint_D d^2\delta(x,y,z)dxdydz$$

Dove $d^2$ è la distanza dell'elemento infinitesimo dall'asse.

## Integrazione per fili

Sia dato un solido di cui si conosce l'equazione dell'ipersuperficie ed il suo dominio di integrazione D.

Per conosce il suo volume dovremo risolvere un integrale nella forma:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

Immaginiamo di proiettare il dominio di integrazione sul piano XY: il volume del solido non sarà altro che la somma dei contributi (infinitesimi) degli (infiniti) fili che partono dal dominio proiettato e incontrano il solido la prima volta (per $z = z_0(x,y)$) e la seconda volta (per $z = z_1(x,y)$).

Integrando una prima volta lungo la coordinata z otterremo una funzione di x e di y e non ci resterà che sommare il contributo di tutti i fili appartenenti al dominio proiettato $D_{xy}$:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

## Integrazione per fette

Sia dato un solido di cui si conosce l'equazione dell'ipersuperficie ed il suo dominio di integrazione D.

Come detto precedentemente il metodo risolutivo consiste nel risolvere un integrale triplo.

Immaginiamo di intersecare il solido mediante un piano parallelo all'asse z e di calcolare la superficie della lamina appena individuata: il volume del solido non sarà altro che la somma dei contributi (infinitesimi) delle (infinite) lamine che compongono il solido stesso.

Ogni lamina sarà ristretta ad un sottodominio di D definito come $D_z = D \cap \{z\colon costante\}$. Come abbiamo già visto per gli integrali in due variabili il dominio $D_z$ è racchiuso tra due funzioni di z e si presenterà nella forma:

$$D_z = \{t(z) \le v(x,y) \le w(z)\}$$

Risolvendo l'integrale in due variabili appena ottenuto (considerando z costante) otterremo un valore che dipende ancora da z: ci basterà integrare nuovamente rispetto a z (tra il suo minimo ed il suo massimo) per trovare il volume desiderato:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{z_0}^{z_1}(\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy)dz$$