Serie Numeriche $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$

✪ Serie Notevoli:

➢ **Serie Armonica generalizzata:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (α > 0).

- Converge con α > 1.
- Diverge con α ≤ 1.

➢ **Serie Geometrica:** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

- q = ragione. (q ∈ R).
- Diverge con |q| ≥ 1.
- Converge con |q| < 1.
    - La somma della serie (quando converge) è $S = \frac{1}{1-q}$ **(N.B. La serie deve partire da n = 0!!)**
- Irregolare con q ≤ -1.

➢ **Serie di Mengoli (Telescopica):** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

- Converge.
- La somma della Serie si può trovare con il metodo già utilizzato con gli integrali ($\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$): i termini "si mangiano a vicenda", i rimanenti sono il risultato della somma.

✪ Condizione **necessaria** per la convergenza: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

✪ Serie a termini non negativi:

➢ Criterio del Confronto (si usa spesso con senx e cosx):

- Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serie a termini non negativi tali che $0 \le a_n \le b_n$ ∀n ∈ N. Allora
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è convergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **è minorante di una convergente)**.
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge ($\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **è maggiorante di una divergente).**

➢ **Criterio del Confronto asintotico:** riconduci, attraverso il metodo asintotico, la serie da calcolare ad una nota per trarre delle conclusioni sul suo comportamento.

(Esempio: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ [serie armonica]→ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge).

➢ **Criterio del Rapporto** (si usa spesso con i fattoriali):

- Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$. Calcola $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$:

- Se $0 \leq l < 1$ → la serie converge.
- Se $l > 1$ → la serie diverge.
- Se $l = 1$ → la serie è indeterminata.

➢ **Criterio della Radice** (si usa spesso con x^n):

- Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$. Calcola $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$:
  - Se $0 \leq l < 1$ → la serie converge.
  - Se $l > 1$ →la serie diverge.
  - Se $l = 1$ → la serie è indeterminata.

✪ Serie di segno alternato:

➢ **Teorema della convergenza assoluta** → vedi sotto. Se la serie non è assolutamente convergente usa criterio di Liebniz.

➢ **Criterio di Liebniz:**

- Sia $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, la serie converge se:
  - $a_n \geq 0$.
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
  - $a_{n+1} \leq a_n$ verifica così → $f'(x) < 0$ con $x > x_0$. $\forall n \geq n_0$.

✪ Serie di segno qualunque:

➢ **Teorema della convergenza assoluta:**

- Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.
- Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (non vale il contrario).

✪ Resto:

➢ **Serie a termini alternati:**

- $|a_{n+1}| = R_{n+1}$.
- Per calcolare la serie con un certo errore bisogna calcolare la serie fino a n che si trova dalla seguente disequazione $a_{n+1} < errore$ (Esempio errore = 1/100).